

22

**PROBLEMAS RESUELTOS  
DE ÓPTICA GEOMÉTRICA**

Óptica

**Jürgen Baier Saip**

Ediciones Universidad Católica del Maule



**TEXTOS DE APOYO A LA DOCENCIA**  
**Ediciones Universidad Católica de Maule**

Casilla 617 - Talca - CHILE

REGISTRO DE PROPIEDAD INTELECTUAL N° 212361

ISBN: 978-956-7576-52-4

PRIMERA EDICIÓN  
Talca, Diciembre de 2011

Director de la Colección Textos de Apoyo a la Docencia:  
Juan Cornejo Espejo

Diseño y Diagramación:  
Luz María Gutiérrez Tapia

Corrección de Estilo:  
Reinaldo Cortez Valenzuela

Impresión:  
Impresora Gutenberg ® Talca

Impreso en Chile - Printed in Chile

# ÍNDICE GENERAL

<b>Prólogo</b>	pág. 5
<b>1. Reflexión y refracción</b>	pág. 7
1.1. Problemas resueltos .	pág. 9
1.2. Problemas propuestos	pág. 43
<b>2. Espejos</b>	pág. 47
2.1. Problemas resueltos	pág. 50
2.2. Problemas propuestos	pág. 80
<b>3. Superficie esférica refringente</b>	pág. 85
3.1. Problemas resueltos	pág. 87
3.2. Problemas propuestos	pág. 111
<b>4. Lentes delgadas</b>	pág. 115
4.1. Problemas resueltos	pág. 118
4.2. Problemas propuestos	pág. 148
<b>Apéndice A. Fórmulas matemáticas</b>	pág. 153
A.1. Aproximaciones	pág. 153
A.2. Trigonometría	pág. 154
A.3. Algunas derivadas e integrales	pág. 155
<b>Apéndice B. Bibliografía</b>	pág. 157



## PRÓLOGO

La experiencia que he tenido enseñando me ha mostrado que los apuntes, guías y pruebas anteriores constituyen una valiosa fuente de información para estudiantes que desean prepararse para las evaluaciones. Por otra parte, la literatura que existe es inadecuada para principiantes y cubre esencialmente dos extremos: en uno, aparecen ejercicios resueltos que son demasiado elementales para estudiantes de carreras técnicas y, en el otro, hay problemas de buen nivel, pero que muchas veces vienen sin la solución. La presente obra contiene 80 problemas desarrollados y 28 problemas propuestos de Óptica Geométrica: reflexión, refracción, espejos planos y esféricos, superficies esféricas refringentes y lentes delgadas.

Este libro no pretende ser un texto base para un curso de óptica geométrica, ya que el objetivo está centrado en la resolución de problemas y no en la exposición detallada de los fundamentos teóricos. La finalidad es que se puedan aprender conceptos básicos y metodologías como si se estuviera en una *ayudantía*. Trabajando ejercicios que van desde un nivel elemental hasta un nivel avanzado, se puede adquirir experiencia para contestar una amplia variedad de problemas.

Al comienzo de cada capítulo se encuentra una breve descripción de los fundamentos teóricos, pero sin deducir fórmulas. En especial, se abordan temas que usualmente les cuestan más a los estudiantes. El énfasis no fue insertar un gran número de problemas con soluciones cortas, mostrando solamente algunos pasos que conducen al resultado final, sino que se escogieron problemas representativos de cada materia y se presentan, en forma clara, soluciones detalladas. En algunos casos, se explica más de un método de solución que conduce al mismo resultado final.

Varios de los temas son independientes entre sí y, en algunos casos, se puede iniciar el estudio de una parte sin haber consultado el contenido de capítulos anteriores. En las soluciones a veces se citan las ecuaciones, las que se referencian por su número y por la página en la que se encuentran. Por ejemplo, Ec. (4.1, 116) indica la ecuación 4.1 que está en la página 116.

Las figuras ilustran sólo los aspectos esenciales para la comprensión de los problemas. Siempre que fue posible, se dibujó la figura a escala, e incluso *parte de la respuesta* se encuentra graficada, de modo que se consiga visualizar la solución por adelantado. Con esto se facilita el entendimiento de lo que se pretende hacer con números.

Los problemas con un mayor grado de dificultad se encuentran por lo general, al final de cada capítulo y constituyen un desafío para madurar los conocimientos. Ciertos ejercicios fueron diseñados para estudiantes avanzados. Al término de cada capítulo, se encuentran problemas propuestos que traen la respuesta al final.

Ya que el enfoque es la comprensión del problema y su solución desde un punto de vista físico, la mayoría de los ejercicios se resuelven sin usar el cálculo diferencial e integral. El Apéndice incluye fórmulas matemáticas como un recordatorio para el estudiante.

Finalmente, deseo agradecer a los estudiantes que durante varios semestres han asistido a las cátedras, participando en el desarrollo de la clase y formulando sus inquietudes. De esta forma, con el pasar del tiempo, pude acumular una gran cantidad de datos que me permitió escribir este libro.

**Jürgen Baier**

Talca, Diciembre de 2011

# CAPÍTULO 1

## REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

La óptica es el ramo de la física que se ocupa del estudio del comportamiento de la luz y, en especial, de su propagación a través de diversos materiales. Cuando la longitud de onda de la luz resulta ser mucho menor que las dimensiones de los objetos que aparecen en el problema, se usan aproximaciones que conducen a la óptica geométrica.<sup>1</sup> La propagación de la luz se describe por medio de rayos que son líneas perpendiculares a los frentes de onda.<sup>2</sup>

En este capítulo, el lector se familiarizará con los fenómenos de reflexión y de refracción, que constituyen la base de la óptica geométrica. La luz es una onda y como tal puede ser reflejada y refractada. Para describir la propagación de rayos se necesitan dos leyes.

- Ley de reflexión (Fig. 1.1-a): el ángulo de reflexión  $\theta_2$  es igual al ángulo de incidencia  $\theta_1$ . El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie reflectora se encuentran en un mismo plano. Por este motivo, muchas veces se consideran los problemas en dos dimensiones.
- Índice de refracción  $n$ : es igual a la velocidad de la luz  $c = 3 \times 10^8$  m/s en el vacío dividida por la velocidad de la luz  $v$  en el medio que se propaga

<sup>1</sup> Por otro lado, si la difracción no es despreciable, se debe emplear la óptica física, donde se trata la luz como onda electromagnética.

<sup>2</sup> Un frente de onda corresponde a una superficie definida por los puntos  $\mathbf{r}$ , donde la fase  $\phi(\mathbf{r}, t)$  es constante. Esta superficie se mueve a medida que el tiempo  $t$  transcurre. Un rayo de luz también representa la trayectoria por donde fluye la energía electromagnética.

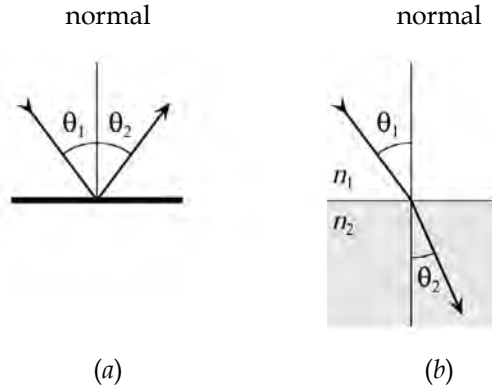


Figura 1.1: (a) Reflexión: la luz incidente y la reflejada están al mismo lado del plano de reflexión. La normal es la recta perpendicular a la superficie. (b) Refracción: la luz pasa de un medio con índice de refracción  $n_1$  a otro con índice  $n_2$  y su dirección de propagación cambia. En la Figura  $\theta_2 < \theta_1$ , lo que se obtiene para  $n_2 > n_1$ .

$$n = \frac{c}{v} \geq 1 \quad (1.1)$$

Por lo general, el índice de refracción varía con la longitud de onda de la luz, lo que recibe el nombre de dispersión.

- Ley de Snell (Fig. 1.1-b): el ángulo de incidencia  $\theta_1$  y el ángulo de refracción  $\theta_2$  satisfacen la siguiente relación

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad (1.2)$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción de los medios. De forma similar a lo que ocurre en la reflexión, el rayo incidente, el rayo refractado y la normal están en un mismo plano.

Si luz no monocromática incide sobre un medio dispersivo, entonces cada longitud de onda se refracta a un ángulo diferente. Por ejemplo, cuando luz blanca (= no monocromática) incide sobre un prisma (= medio dispersivo), lo que se observa es que los diversos colores (= longitudes de onda) salen refractados en direcciones diferentes.



- Reflexión interna total: para

$$n_1 \sin \theta_1 > n_2 \quad (1.3)$$

la Ec. (1.2) no tiene solución y no ocurre refracción, sino que únicamente reflexión de la luz.

- Principio de Fermat: la trayectoria que sigue la luz cuando se propaga de un punto a otro es tal, que el tiempo que demora es mínimo.<sup>3</sup> En particular, si se tiene un medio homogéneo donde el índice de refracción no depende de la posición, entonces la luz se propaga en línea recta.<sup>4</sup> Este principio permite derivar las leyes de la reflexión (Prob. 1.24) y de la refracción (Prob. 1.25).

## 1.1. Problemas resueltos

**1.1** Si la velocidad de la luz en un cierto medio es  $1,96 \times 10^8$  m/s, ¿cuánto vale el índice de refracción?

El índice de refracción es igual a la razón entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \times 10^8}{1,96 \times 10^8} = 1,53$$

**1.2** Un haz de luz que se propaga en el vacío ( $n_1 = 1$ ) incide sobre una placa de vidrio. En el vacío el ángulo con la normal vale  $35,5^\circ$  y en el vidrio  $23,1^\circ$ . Determine el índice de refracción  $n_2$  del vidrio.

La ley de Snell relaciona los ángulos y los índices de refracción

$$1 \sin(35,5^\circ) = n_2 \sin(23,1^\circ)$$

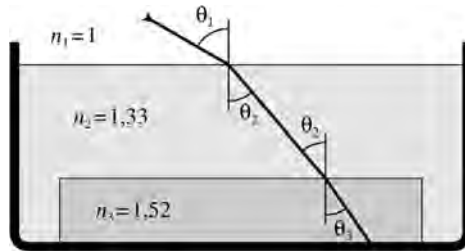
<sup>3</sup> O más precisamente: el tiempo del recorrido es estacionario con respecto a variaciones infinitesimales de la trayectoria.

<sup>4</sup> La distancia mínima entre dos puntos es una recta, de tal forma que para una velocidad independiente de la posición el tiempo del recorrido también es mínimo.

de manera que

$$n_2 = \frac{\sin(35,5^\circ)}{\sin(23,1^\circ)} = 1,48$$

**1.3** Un vidrio grueso con índice de refracción  $n_3 = 1,52$  yace en el fondo de un estanque con agua ( $n_2 = 1,33$ ). Un rayo de luz en el aire ( $n_1 = 1$ ) incide sobre el agua, formando un ángulo  $\theta_1 = 60^\circ$  con la vertical. ¿Qué ángulos hay entre el rayo y la normal (A) en el agua y (B) en el vidrio?



(A) Si  $\theta_2$  y  $\theta_3$  representan los ángulos en el agua y en el vidrio respectivamente, entonces, de acuerdo con la ley de Snell

$$1 \sin(60^\circ) = 1,33 \sin \theta_2 \quad (\text{P 1.3.1})$$

$$1,33 \sin \theta_2 = 1,52 \sin \theta_3 \quad (\text{P 1.3.2})$$

La Ec. (P 1.3.1) permite calcular  $\theta_2$

$$\theta_2 = \sin^{-1} \left( \frac{\sin(60^\circ)}{1,33} \right) = 40,6^\circ$$

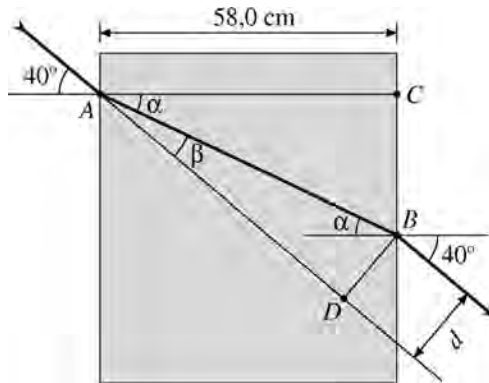
(B) Para determinar  $\theta_3$  hay que sustituir el valor de  $\theta_2$  en la Ec. (P 1.3.2). Pero otra forma es igualar el término a la izquierda de la Ec. (P 1.3.1) con el término a la derecha de la Ec. (P 1.3.2), pues ambos son iguales a  $1,33 \sin \theta_2$

$$1 \sin(60^\circ) = 1,52 \sin \theta_3$$

$$\theta_3 = \sin^{-1} \left( \frac{\sin(60^\circ)}{1,52} \right) = 34,7^\circ$$

Este procedimiento se puede usar siempre que las superficies refringentes son paralelas entre sí.

**1.4 Un bloque de vidrio tiene un espesor de 58 cm y un índice de refracción  $n = 1,50$ . Si la luz incide formando un ángulo de  $40^\circ$  con la normal, calcule (A) el tiempo necesario para que atraviese el bloque y (B) el desvío lateral  $d$ .**



(A) El tiempo se calcula dividiendo la distancia recorrida  $\overline{AB}$  por la velocidad de la luz  $v$  en el vidrio. Con la finalidad de encontrar  $\overline{AB}$  se necesita determinar, primero, cuánto vale el ángulo  $\alpha$ , lo que se hace usando la ley de Snell

$$1 \sin(40^\circ) = 1,50 \sin \alpha$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{\sin(40^\circ)}{1,50} \right) = 25,4^\circ$$

El segmento  $\overline{AB}$  representa la hipotenusa del triángulo rectángulo  $ABC$ . Su longitud se calcula dividiendo el cateto adyacente  $\overline{AC} = 58,0$  cm por  $\cos \alpha$

$$\overline{AB} = \frac{58,0}{\cos(25,4^\circ)} = 64,2 \text{ cm}$$

lo que equivale a 0,642 m. La velocidad se obtiene a partir del índice de refracción

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8}{1,50} = 2 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

de manera que el tiempo que demora en atravesar el bloque es

$$t_{AB} = \frac{\overline{AB}}{v} = \frac{0,642}{2 \times 10^8} = 3,21 \times 10^{-9} \text{ s} = 3,21 \text{ ns}$$

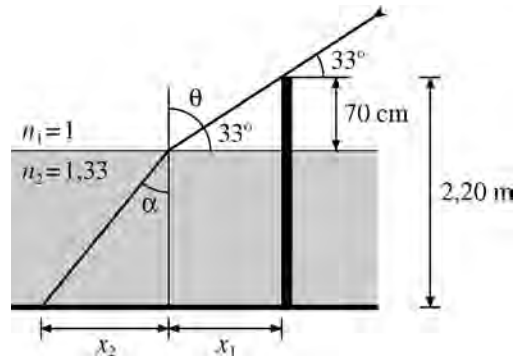
(B) La distancia  $\overline{BD}$  se puede calcular a partir de  $\overline{AB}$  y el ángulo  $\beta$ . Ya que  $\alpha + \beta$  es igual a  $40^\circ$

$$\beta = 40^\circ - \alpha = 40^\circ - 25,4^\circ = 14,6^\circ$$

Por lo tanto, el desvío vale

$$d = \overline{AB} \sin \beta = 64,2 \sin(14,6^\circ) = 16,2 \text{ cm}$$

**1.5** Un poste de 2,20 m se extiende desde el fondo de un estanque hasta una altura de 70 cm por arriba del nivel de agua. Si la luz incide formando un ángulo de  $33^\circ$  con la horizontal, halle la longitud  $x_1 + x_2$  de la sombra del poste en el fondo del estanque.



Para encontrar las distancias  $x_1$  y  $x_2$  hay que determinar los ángulos  $\theta$  y  $\alpha$ . Ya que  $\theta$  representa el complemento del ángulo de  $33^\circ$

$$\theta = 90^\circ - 33^\circ = 57^\circ$$

Además, usando la ley de Snell, se puede obtener el ángulo  $\alpha$  del rayo refractado

$$1 \sin \theta = 1,33 \sin \alpha$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{\sin(57^\circ)}{1,33} \right) = 39,1^\circ$$

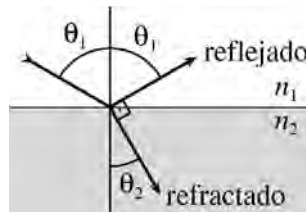
De los triángulos que aparecen en la Figura se concluye que las distancias  $x_1$  y  $x_2$  son iguales a

$$\begin{cases} x_1 = 0,70 \tan \theta = 0,70 \tan(57^\circ) = 1,08 \text{ m} \\ x_2 = (2,20 - 0,70) \tan \alpha = 1,50 \tan(39,1^\circ) = 1,22 \text{ m} \end{cases}$$

La longitud total de la sombra vale entonces

$$x_1 + x_2 = 1,08 + 1,22 = 2,30 \text{ m}$$

**1.6 Luz incide desde el aire ( $n_1 = 1$ ) sobre un medio transparente formando un ángulo  $\theta_1 = 55,0^\circ$  con la normal. Los rayos parcialmente reflejado y refractado son perpendiculares entre sí. (A) Determine el índice de refracción  $n_2$  del medio. (B) ¿Cuánto vale el ángulo crítico para la reflexión interna total?**



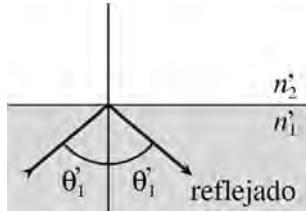
**(A)** El rayo reflejado forma un ángulo de  $90^\circ$  con el rayo refractado. Como los tres ángulos suman  $180^\circ$

$$\theta_1 + 90^\circ + \theta_2 = 180^\circ$$

$$\theta_2 = 90^\circ - \theta_1 = 35,0^\circ$$

De esta forma, usando la ley de Snell, se obtiene que

$$n_2 = n_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = 1 \frac{\sin(55,0^\circ)}{\sin(35,0^\circ)} = 1,428$$



**(B)** Para que pueda ocurrir la reflexión interna total, la luz debe propagarse desde el medio transparente que tiene un índice de refracción mayor ( $n_1 = 1,428$ ) hacia el aire que tiene un índice más pequeño ( $n_2 = 1$ ). Luego según la Ec. (1.3, 9)

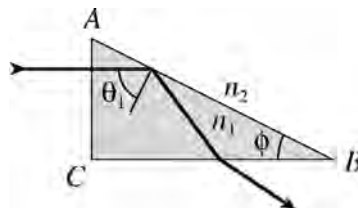
$$\sin \theta_1' > \frac{n_2'}{n_1'} = \frac{1}{1,428} = 0,7002$$

y por lo tanto el ángulo crítico vale

$$\theta_{cr} = \sin^{-1}(0,7002) = 44,4^\circ$$

Si la luz incide a un ángulo  $\theta_1' > \theta_{cr}$  habrá una reflexión interna total.

**1.7 Un rayo de luz incide normalmente sobre un prisma de vidrio que tiene un índice de refracción  $n_1 = 1,39$ . (A) Suponiendo que el prisma está en el aire ( $n_2 = 1$ ), halle el valor máximo del ángulo  $\phi$  para el cual el rayo experimenta una reflexión total en el lado AB. (B) Repita el cálculo si el prisma se encuentra inmerso en el agua ( $n_2 = 1,33$ ).**



(A) La condición para la reflexión interna total está dada por la Ec. (1.3, 9) con  $\theta_1 = 90^\circ - \phi$ ,  $n_1 = 1,39$  y  $n_2 = 1$

$$1,39 \sin(90^\circ - \phi) > 1 \quad (\text{P 1.7.1})$$

$$\cos \phi > \frac{1}{1,39}$$

Luego el valor crítico es

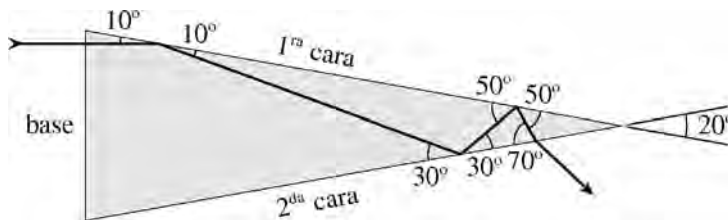
$$\phi_{\text{cr}} = \cos^{-1} \left( \frac{1}{1,39} \right) = 44,0^\circ$$

Cualquier valor de  $\phi$  menor que  $\phi_{\text{cr}}$  satisface la Ec. (P 1.7.1).

(B) Este ítem se responde de forma análoga al anterior, pero usando  $n'_2$  en el lugar de  $n_2$

$$\phi'_{\text{cr}} = \cos^{-1} \left( \frac{n'_2}{n_1} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{1,33}{1,39} \right) = 16,9^\circ$$

**1.8 Luz penetra perpendicularmente por la base de un prisma isóceles como es ilustrado en la Figura. Sabiendo que el ángulo en el ápice es igual a  $20^\circ$  y que el índice de refracción vale 1,60, ¿cuántas reflexiones sufre el rayo antes de conseguir escapar parcialmente del prisma por primera vez?**



El ángulo crítico para la reflexión interna total se obtiene a partir de los índices de refracción  $n_1 = 1,60$ ,  $n_2 = 1$  y la Ec. (1.3, 9)

$$\theta_{\text{cr}} = \sin^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{1}{1,60} \right) = 38,7^\circ$$

Así, mientras el ángulo de incidencia con la normal sea mayor que  $38,7^\circ$  ocurrirá una reflexión total. Debido a la geometría del problema resulta más fácil trabajar con el complemento  $\phi = 90^\circ - \theta$ , que representa el ángulo entre el rayo y la cara. O sea, si  $\phi$  es menor que  $\phi_{cr} = 90^\circ - 38,7^\circ = 51,3^\circ$  habrá sólo reflexión.

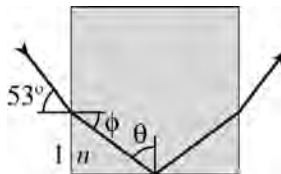
Ahora hay que proceder a determinar los sucesivos ángulos, hasta encontrar un valor que sea mayor que  $51,3^\circ$ . De la Figura se ve que el primero vale  $\phi_1 = 10^\circ$  y, por lo tanto, ocurre únicamente la reflexión.

Después de esta reflexión el rayo forma un ángulo de  $10^\circ + 10^\circ = 20^\circ$  con la horizontal. El ángulo con la segunda cara del prisma es entonces  $\phi_2 = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$  y otra vez se da la reflexión total.

A seguir el rayo forma ángulos de  $30^\circ + 10^\circ = 40^\circ$  con la horizontal y  $\phi_3 = 40^\circ + 10^\circ = 50^\circ$  con la primera cara. Aquí nuevamente se obtiene sólo la reflexión.

Finalmente, se encuentran los ángulos  $50^\circ + 10^\circ = 60^\circ$  y  $\phi_4 = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$  con la horizontal y con la segunda cara respectivamente, de manera que aquí no se produce una reflexión interna total. Es decir, hay 3 reflexiones totales antes que el rayo consiga escapar parcialmente del prisma por primera vez.

**1.9 Un rayo de luz incide sobre un cubo de vidrio como el mostrado en la Figura. ¿Cuál debe ser el valor mínimo del índice de refracción  $n$  para que ocurra reflexión interna total en la cara inferior?**



Según la ley de Snell se tiene que

$$1 \sin(53^\circ) = n \sin \phi$$



En esta Ec.  $n$  y  $\phi$  son variables desconocidas y falta encontrar una segunda relación entre ambas para poder responder la pregunta. Si ocurre una reflexión interna total en la cara inferior, entonces  $\theta = 90^\circ - \phi$ ,  $n_1 = n$  y  $n_2 = 1$  deben satisfacer la Ec. (1.3, 9)

$$n \sin(90^\circ - \phi) > 1$$

Así, se construye un sistema con dos Ecs. y dos variables

$$\begin{cases} n \sin \phi = \sin(53^\circ) \\ n \cos \phi > 1 \end{cases}$$

El problema requiere determinar solamente  $n$ , lo que se puede hacer considerando la siguiente identidad

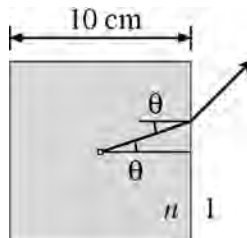
$$n^2 \sin^2 \phi + n^2 \cos^2 \phi = n^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = n^2$$

Por lo tanto, el índice de refracción vale

$$n = \sqrt{(n \sin \phi)^2 + (n \cos \phi)^2} > \sqrt{\sin^2(53^\circ) + 1^2} = 1,28 \quad (\text{P 1.9.1})$$

y el mínimo es  $n_{\min} = 1,28$ .

**1.10** *Un cubo con índice de refracción  $n = 1,86$  y lado 10 cm tiene una burbuja ubicada en su centro geométrico. ¿Qué parte de las caras hay que cubrir en forma mínima de modo que no se vea la burbuja desde ninguna dirección?*

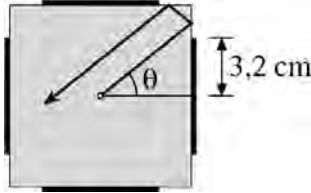


La condición para la reflexión interna total se obtiene a partir de la Ec. (1.3, 9) con  $n_1 = 1,86$  y  $n_2 = 1$

$$1,86 \sin \theta > 1$$

$$\theta > \sin^{-1} \left( \frac{1}{1,86} \right) = 32,5^\circ$$

O sea, para  $\theta$  mayor que  $32,5^\circ$  la luz se refleja y no sale del cubo.

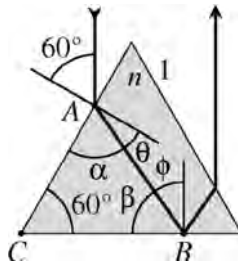


La única luz que proviene de la burbuja y consigue escapar es la que forma un ángulo menor que  $32,5^\circ$  con la normal. Las partes por donde la luz saldría son las que se deben cubrir, o sea, un círculo de radio

$$R = \frac{10}{2} \tan(32,5^\circ) = 3,2 \text{ cm}$$

centrado en cada una de las caras del cubo.

**1.11** La Figura muestra un prisma equilátero sobre el cual incide un rayo de luz. Determine el mínimo índice de refracción  $n$  para que se obtenga una reflexión interna total en B.



Considerando la refracción en A, la ley de Snell permite encontrar una relación entre el ángulo  $\theta$  y  $n$

$$n \sin \theta = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{P 1.11.1})$$

Por otro lado, como  $\phi = 90^\circ - \beta$  ocurrirá la reflexión interna total en B si

$$n \sin(90^\circ - \beta) > 1$$

esto es,

$$n \cos \beta > 1 \quad (\text{P 1.11.2})$$

Dado que la suma de los ángulos internos en el triángulo ABC es igual a  $180^\circ$

$$\alpha + \beta + 60^\circ = 180^\circ$$

y como  $\alpha = 90^\circ - \theta$

$$\beta = 120^\circ - \alpha = 120^\circ - (90^\circ - \theta) = \theta + 30^\circ$$

$$n \cos \beta = n \cos (\theta + 30^\circ) = n \cos \theta \cos(30^\circ) - n \sin \theta \sin(30^\circ)$$

En vista de la Ec. (P 1.11.1) se obtiene

$$n \cos \beta = n \cos \theta \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( n \cos \theta - \frac{1}{2} \right)$$

de manera que la reflexión interna total (Ec. (P 1.11.2)) implica que

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \left( n \cos \theta - \frac{1}{2} \right) > 1$$

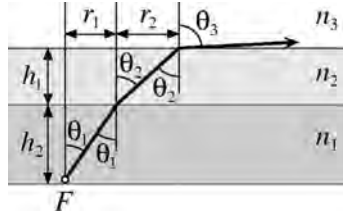
$$n \cos \theta > \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \quad (\text{P 1.11.3})$$

Finalmente, a partir de las Ecs. (P 1.11.1) y (P 1.11.3) se concluye de forma similar a la Ec. (P 1.9.1)

$$n = \sqrt{(n \sin \theta)^2 + (n \cos \theta)^2} > \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^2} = 1,868$$

o sea, el índice de refracción debe valer como mínimo 1,868.

**1.12** Una fuente puntual  $F$  de luz se encuentra inmersa en un líquido transparente con índice de refracción igual a  $n_1$ . Sobre éste existe otro fluido de menor densidad que tiene un índice de refracción  $n_2$ . Finalmente, en la parte superior, el medio es el aire ( $n_3 = 1$ ). Encuentre el radio  $r_1 + r_2$  del círculo en la superficie por el cual consigue escapar la luz.



La distancia horizontal máxima  $r_1 + r_2$  (medida a partir de un punto localizado directamente sobre  $F$ ) se obtiene cuando el ángulo  $\theta_3$  entre el rayo que escapa y la normal tiende a  $90^\circ$ . Los otros ángulos se determinan a partir de la ley de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = 1 \sin 90^\circ$$

de manera que

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{1}{n_1} \\ \sin \theta_2 = \frac{1}{n_2} \end{cases}$$

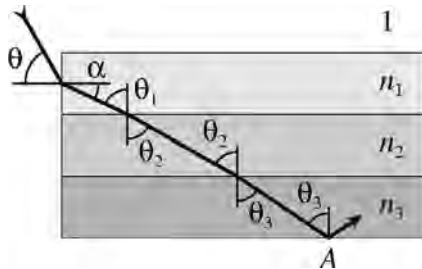
Por lo tanto, las tangentes de los ángulos son iguales a

$$\begin{cases} \tan \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{\frac{1}{n_1}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n_1^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \\ \tan \theta_2 = \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} = \frac{\frac{1}{n_2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n_2^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - 1}} \end{cases}$$

Finalmente, el radio total vale

$$r = r_1 + r_2 = h_1 \tan \theta_1 + h_2 \tan \theta_2 = \frac{h_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} + \frac{h_2}{\sqrt{n_2^2 - 1}}$$

**1.13 Luz proveniente del vacío incide lateralmente a un ángulo  $\theta = 60^\circ$  sobre la primera de un conjunto de tres placas que están apiladas. Si los índices de refracción son  $n_1 = 1 + a$ ,  $n_2 = 1 + 2a$ ,  $n_3 = 1 + 3a$ , determine el valor mínimo de  $a$  para que se verifique una reflexión interna total en A.**



Aplicando la ley de Snell a las refracciones entre las placas se obtiene el siguiente par de Ecs.

$$\begin{cases} n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \\ n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 \end{cases}$$

La condición para la reflexión interna total en A es

$$n_3 \sin \theta_3 > 1$$

de donde se concluye que

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 > 1 \quad (\text{P 1.13.1})$$

Considerando la refracción en la superficie lateral con  $n = 1$  y  $\theta = 60^\circ$

$$1 \sin(60^\circ) = n_1 \sin \alpha$$

y usando la relación  $\alpha = 90^\circ - \theta_1$  se encuentra que

$$\sin(60^\circ) = n_1 \sin(90^\circ - \theta_1) = n_1 \cos \theta_1$$

$$\sin^2(60^\circ) = n_1^2 \cos^2 \theta_1 = n_1^2 (1 - \sin^2 \theta_1)$$

$$n_1^2 \sin^2 \theta_1 = n_1^2 - \sin^2(60^\circ)$$

Según la Ec. (P 1.13.1) se tiene  $(n_1 \sin \theta_1)^2 > 1^2$ , lo que junto con la última Ec. implica que

$$n_1^2 - \sin^2(60^\circ) > 1$$

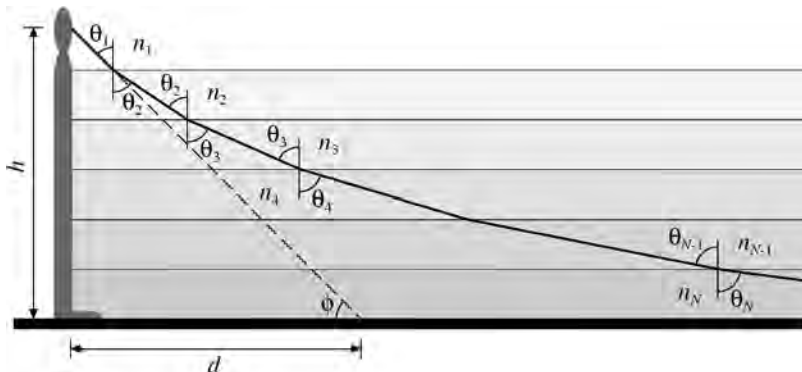
$$n_1 > \sqrt{1 + \sin^2(60^\circ)} = 1,323$$

Luego el valor mínimo para poder observar una reflexión interna total en A es  $a_{\min} = n_{1,\min} - 1 = 0,323$ . Además, note que, entre la primera y la segunda placa, no puede ocurrir una reflexión interna total, pues  $n_1 < n_2$ . El mismo razonamiento se aplica entre la segunda y la tercera placa.

#### 1.14 Debido al gradiente de temperatura en la masa de aire sobre una carretera plana, el índice de refracción $n$ varía con la altura $y$

$$n = n_0(1 + 1,10 \times 10^{-6} y)$$

donde  $y$  se mide en metros. Si los ojos de una persona están a  $h = 1,70$  m de altura, ¿cuál es la máxima distancia aparente  $d$  que la persona consigue ver la pista?



El índice de refracción depende de la posición  $y$ , por lo tanto, el rayo se desvía a medida que se propaga. Este problema se puede considerar como una secuencia de delgadas capas de aire con índices de refracción iguales a  $n_1, n_2, \dots, n_N$ . Como las capas son paralelas entre sí, los ángulos con que la luz entra y sale de cada capa son iguales. Aplicando sucesivamente la ley de Snell se encuentra

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = \dots = n_N \sin \theta_N$$

El ángulo crítico para el cual no se consigue ver más la carretera ocurre cuando la luz pasa tangente en la capa inferior ( $\theta_N = 90^\circ$ ). Ya que

$$\begin{cases} n_1 = n_0 (1 + 1,10 \times 10^{-6} \times 1,70) = 1,00000187 n_0 \\ n_N = n_0 (1 + 1,10 \times 10^{-6} \times 0) = n_0 \end{cases}$$

resulta

$$\sin \theta_1 = \frac{n_N}{n_1} \sin (90^\circ) = \frac{1}{1,00000187} \quad (\text{P 1.14.1})$$

Si se considera el complemento  $\phi$  del ángulo  $\theta_1$  se obtiene lo siguiente

$$\frac{1}{\cos \phi} = \frac{1}{\cos (90^\circ - \theta_1)} = \frac{1}{\sin \theta_1} = 1,00000187$$

Usando identidades geométricas se concluye que

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}}{\cos \phi} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \phi} - 1} \\ &= \sqrt{(1,00000187)^2 - 1} = \sqrt{0,00000374} = 0,001934 \end{aligned}$$

Finalmente, con la tangente se calcula la distancia aparente

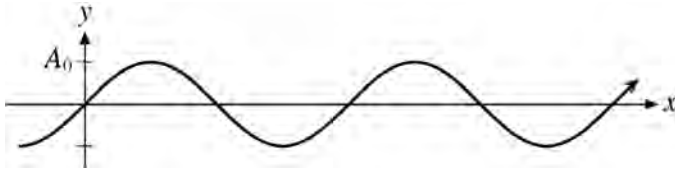
$$d = \frac{h}{\tan \phi} = \frac{1,70}{0,001934} = 879 \text{ m}$$

Para una distancia mayor que  $d$  (lo que equivale a disminuir el ángulo  $\phi$ ) el rayo no *toca* la pista y se observa el fenómeno de espejismo (Prob. 1.16).

**1.15** El índice de refracción  $n$  de un medio varía con la altura  $y$ . (A) Encuentre la Ec. que describe la trayectoria  $x = x(y)$  de un rayo que pasa por el punto  $x_0, y_0$  formando un ángulo  $\theta_0$  con el eje  $y$ . (B) Si en  $y = 0$  el índice vale  $n_0$  y la trayectoria del rayo mostrada en la Figura es

$$y = A_0 \sin(kx) \quad (\text{P 1.15.1})$$

determine  $n(y)$  en el intervalo  $-A_0 \leq y \leq A_0$ .



(A) De forma similar al Prob. 1.14, se concluye que

$$n(y) \sin \theta = n(y_0) \sin \theta_0 \quad (\text{P 1.15.2})$$

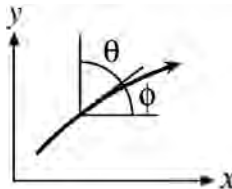
o bien,

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{n(y)}{b} \quad (\text{P 1.15.3})$$

siendo

$$b = n(y_0) \sin \theta_0 \quad (\text{P 1.15.4})$$

una constante



La tangente del ángulo  $\phi$  en la Figura se relaciona con la derivada por medio de la Ec.



$$\tan \theta = \frac{dy}{dx}$$

Pero como  $\phi = 90^\circ - \theta$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1} = \sqrt{\frac{n^2(y)}{b^2} - 1} \end{aligned} \quad (\text{P 1.15.5})$$

donde al final se usó la Ec (P 1.15.3).

La última Ec. se puede reescribir en la forma diferencial

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{n^2(y)}{b^2} - 1}}$$

Integrando, se encuentra finalmente

$$x - x_0 = \int_{y_0}^y \left[ \frac{n^2(y)}{b^2} - 1 \right]^{-1/2} dy \quad (\text{P 1.15.6})$$

**(B)** La derivada de la trayectoria descrita por la Ec. (P 1.15.1) se puede expresar en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= kA_0 \cos(kx) = kA_0 \sqrt{1 - \sin^2(kx)} \\ &= k \sqrt{A_0^2 - A_0^2 \sin^2(kx)} = k \sqrt{A_0^2 - y^2} \end{aligned}$$

Comparando este resultado con la Ec. (P 1.15.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{n^2}{b^2} - 1} &= k \sqrt{A_0^2 - y^2} \\ \frac{n^2}{b^2} - 1 &= k^2 A_0^2 - k^2 y^2 \\ n^2 &= b^2 (1 + k^2 A_0^2 - k^2 y^2) \end{aligned}$$

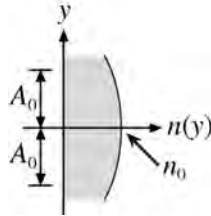
Como  $n(y=0) = n_0$  se deduce que  $n_0^2 = b^2 (1 + k^2 A_0^2)$ , esto es,  $b^2 = n_0^2 / (1 + k^2 A_0^2)$ . Por lo tanto

$$n^2 = \frac{n_0^2}{1 + k^2 A_0^2} (1 + k^2 A_0^2 - k^2 y^2) = n_0^2 \left( 1 - \frac{k^2 y^2}{1 + k^2 A_0^2} \right)$$

En particular, en los bordes  $y = \pm A_0$  el índice de refracción asume el valor

$$n = n_0 \sqrt{1 - \frac{k^2 A_0^2}{1 + k^2 A_0^2}} = \frac{n_0}{\sqrt{1 + k^2 A_0^2}} < n_0$$

El gráfico ilustra como varía el índice para el caso especial en que  $kA_0 = 1$ .



Según la Ec. (P 1.15.1) el rayo está comprendido en el intervalo  $-A_0 \leq y \leq A_0$  a medida que se propaga a lo largo del eje  $x$ . O sea, es posible obtener un rayo confinado en una región cuando en el centro el índice de refracción es mayor que en los bordes. Basándose en este principio se construyen las fibras ópticas: un núcleo rodeado por otro material que tiene un índice de refracción más pequeño.

**1.16 El índice de refracción varía con la altura  $y$  según la fórmula  $n = n_0 (1 + ay)$ , donde  $n_0$  y  $a$  son constantes positivas. (A) Obtenga la trayectoria del rayo que pasa por el origen, formando un ángulo  $\theta_0$  con el eje  $y$ . (B) ¿Cuánto vale la altura mínima de la trayectoria? (C) ¿Qué sucede cuando  $a \rightarrow 0$ ?**

(A) Sustituyendo  $x_0 = y_0 = 0$  y  $n = n_0 (1 + ay)$  en la Ec. (P 1.15.6) se calcula la trayectoria

$$\begin{aligned}
 x - 0 &= \int_0^y \left[ \frac{n_0^2(1+ay)^2}{b^2} - 1 \right]^{-1/2} dy = \int_{u_0}^u [u^2 - 1]^{-1/2} \frac{b du}{n_0 a} \\
 &= \frac{b}{n_0 a} \left[ \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) - \ln(u_0 + \sqrt{u_0^2 - 1}) \right] \\
 &= \frac{b}{n_0 a} \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) - x_A \tag{P 1.16.1}
 \end{aligned}$$

donde se reemplazó la variable  $y$  por

$$u = \frac{n_0}{b} (1 + ay) \tag{P 1.16.2}$$

y la constante  $x_A$  está definida por

$$x_A = \frac{b}{n_0 a} \ln(u_0 + \sqrt{u_0^2 - 1}) \tag{P 1.16.3}$$

Según la Ec (P 1.15.4) la constante  $b$  es igual a  $n_0 \sin \theta_0$ , de tal forma que

$$u_0 = u(0) = \frac{n_0}{b} = \frac{1}{\sin \theta_0}$$

Este resultado permite calcular el argumento del logaritmo que aparece en la Ec. (P 1.16.3)

$$\begin{aligned}
 u_0 + \sqrt{u_0^2 - 1} &= \frac{1}{\sin \theta_0} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta_0} - 1} = \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0}}{\sin \theta_0} \\
 &= \frac{1 + \cos \theta_0}{\sin \theta_0} = \frac{2 \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{2 \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_0}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta_0}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} = \cot \frac{\theta_0}{2}
 \end{aligned}$$

Luego la expresión para  $x_A$  se puede simplificar

$$x_A = \frac{\sin \theta_0}{a} \ln \left( \cot \frac{\theta_0}{2} \right) \tag{P 1.16.4}$$

Con el objetivo de obtener la Ec. de la trayectoria  $y(x)$  es necesario determinar las funciones  $y(u)$  y  $u(x)$ . Invertiendo la Ec. (P 1.16.1) se expresa  $u$  en términos de  $x$

$$\begin{aligned}
 x + x_A &= \frac{\sin \theta_0}{a} \ln \left( u + \sqrt{u^2 - 1} \right) \\
 e^{a(x+x_A)/\sin \theta_0} &= u + \sqrt{u^2 - 1} \\
 \left[ \sqrt{u^2 - 1} \right]^2 &= \left[ e^{a(x+x_A)/\sin \theta_0} - u \right]^2 \\
 u^2 - 1 &= e^{2a(x+x_A)/\sin \theta_0} - 2u e^{a(x+x_A)/\sin \theta_0} + u^2 \\
 2u e^{a(x+x_A)/\sin \theta_0} &= e^{2a(x+x_A)/\sin \theta_0} + 1
 \end{aligned}$$

esto es

$$u = \frac{e^{a(x+x_A)/\sin \theta_0} + e^{-a(x+x_A)/\sin \theta_0}}{2} = \cosh \left( \frac{a}{\sin \theta_0} (x + x_A) \right)$$

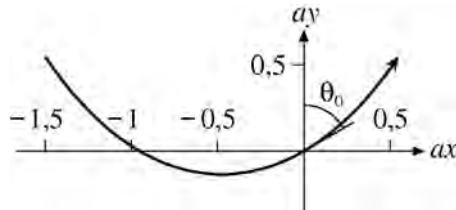
A continuación, partiendo de la Ec. (P 1.16.2) se puede escribir  $y$  como función de la variable  $u$

$$y = \frac{1}{a} \left( \frac{b}{n_0} u - 1 \right) = \frac{\sin \theta_0}{a} u - \frac{1}{a}$$

Combinando las dos últimas Ecs. se obtiene que

$$y = \frac{\sin \theta_0}{a} \cosh \left( \frac{a}{\sin \theta_0} (x + x_A) \right) - \frac{1}{a} \quad (\text{P 1.16.5})$$

La Figura al lado muestra la trayectoria para  $\theta_0 = 60^\circ$ .



Observe que, si  $\theta_0$  fuese negativo, la curva tendría una pendiente negativa en el origen del sistema de coordenadas. O sea, es como si la luz descendiese primero y después volviese a subir, lo que equivale a reflejar la trayectoria en el eje  $y$ .

(B) Con la finalidad de determinar la posición del mínimo hay que derivarla Ec. (P 1.16.5) e igualar el resultado a cero

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{a}{\sin\theta_0}(x + x_A)\right) = 0$$

El seno hiperbólico es una función que vale cero solamente cuando su argumento se anula, lo que implica que

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin\theta_0}(x + x_A) &= 0 \\ x &= -x_A\end{aligned}$$

Con este valor para  $x$  se puede calcular la ordenada mínima

$$y_{\min} = \frac{\sin\theta_0}{a} \cosh 0 - \frac{1}{a} = \frac{\sin\theta_0 - 1}{a} < 0$$

Denotando por  $h = 0 - y_{\min} > 0$  la altura del origen de coordenadas con respecto al mínimo, se deduce que

$$\begin{aligned}h &= \frac{1 - \sin\theta_0}{a} \\ \sin\theta_0 &= 1 - ah \approx \frac{1}{1 + ah}\end{aligned}$$

Esta fórmula coincide con la Ec. (P 1.14.1, 23) que se usó para calcular el ángulo de la distancia aparente. Si el rayo pasa por el origen (= ojos del observador en el Prob. 1.14) a un ángulo  $\theta'_0 > \theta_0$ , entonces la variación de altura  $h'$  es menor que  $h$ , de tal forma que el rayo no desciende lo suficiente para tocar la pista. Es decir, el rayo baja y después vuelve a subir: se produce un *reflejo* de la luz, lo que se conoce como espejismo.

(C) Note que si  $a \rightarrow 0$

$$X = \frac{a}{\sin\theta_0} x \ll 1$$

Por otra parte, de acuerdo con la Ec. (P 1.16.4)

$$X_A = \frac{a}{\sin\theta_0} x_A = \ln\left(\cot\frac{\theta_0}{2}\right)$$

de manera que

$$\begin{aligned}\cosh X_A &= \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[ \ln \left( \cot \frac{\theta_0}{2} \right) \right] + \exp \left[ - \ln \left( \cot \frac{\theta_0}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cot \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{\cot \frac{\theta_0}{2}} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos \frac{\theta_0}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} + \frac{\sin \frac{\theta_0}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}} \right\} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} + \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}{2 \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_0}{2}} = \frac{1}{\sin \theta_0}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\sinh X_A &= \sqrt{\cosh^2 X_A - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta_0} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_0}}{\sin \theta_0} = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} = \cot \theta_0\end{aligned}$$

Así, la función que describe la trayectoria del rayo (Ec. (P 1.16.5)) se puede simplificar de la siguiente manera<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}y &= \frac{\sin \theta_0}{a} \cosh(X - X_A) - \frac{1}{a} \approx \frac{\sin \theta_0}{a} \left( \cosh X_A + X \sinh X_A \right) - \frac{1}{a} \\ &= \frac{\sin \theta_0}{a} \left( \frac{1}{\sin \theta_0} + \frac{a}{\sin \theta_0} x \cot \theta_0 \right) - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} + x \cot \theta_0 - \frac{1}{a} \\ &= x \tan(90^\circ - \theta_0)\end{aligned}$$

Es decir, la luz se propaga en línea recta pasando por el origen y formando un ángulo de  $90^\circ - \theta_0$  con el eje  $x$ , lo que corresponde a un ángulo  $\theta_0$  con el eje  $y$ . Observe que esto se verifica cuando  $a \rightarrow 0$  y por consiguiente  $n = n_0 = \text{const}$ , o sea, para un medio homogéneo.

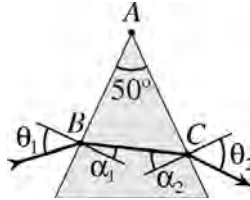
<sup>5</sup> Las funciones hiperbólicas  $\cosh X \equiv (e^X + e^{-X})/2$ ,  $\sinh X \equiv (e^X - e^{-X})/2$  satisfacen la identidad

$$\cosh(X + X_A) = \cosh X \cosh X_A + \sinh X \sinh X_A$$

Para  $X \ll 1$  valen las aproximaciones  $\cosh X \approx 1$  y  $\sinh X \approx X$ , de tal forma que

$$\cosh(X + X_A) \approx \cosh X_A + X \sinh X_A$$

**1.17** Un prisma de vidrio ( $n = 1,60$ ) tiene un ángulo de  $50^\circ$  en su ápice. (A) ¿Cuál es el ángulo de incidencia  $\theta_1$  mínimo para que un rayo entre por una cara y salga por la otra? (B) ¿Qué ángulo de incidencia se requiere para que el rayo atraviese simétricamente el prisma, o sea,  $\theta_1 = \theta_2$ ?



(A) Los puntos  $A, B, C$  forman un triángulo y sus ángulos internos son  $50^\circ$ ,  $90^\circ - \alpha_1$ ,  $90^\circ - \alpha_2$ . Como la suma de los ángulos internos de un triángulo vale  $180^\circ$ , se concluye que

$$50^\circ + (90^\circ - \alpha_1) + (90^\circ - \alpha_2) = 180^\circ$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 50^\circ \quad (\text{P 1.17.1})$$

El ángulo crítico para la reflexión interna total en la segunda cara del prisma ocurre cuando  $\theta_2 = 90^\circ$ . Luego según la ley de Snell

$$1,60 \sin \alpha_2 = 1 \sin(90^\circ)$$

$$\alpha_2 = \sin^{-1} \left( \frac{1}{1,60} \right) = 38,7^\circ$$

con lo que se determina el ángulo  $\alpha_1$

$$\alpha_1 = 50^\circ - \alpha_2 = 50^\circ - 38,7^\circ = 11,3^\circ$$

Aplicando nuevamente la ley de Snell al rayo refractado en la primera superficie se encuentra el ángulo mínimo

$$1 \sin \theta_1 = 1,60 \sin(11,3^\circ)$$

$$\theta_1 = \sin^{-1}(0,314) = 18,3^\circ$$

(B) Para obtener  $\theta_1 = \theta_2$  es necesario que  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Reemplazando  $\alpha_2$  por  $\alpha_1$  en la Eq. (P 1.17.1) se obtiene

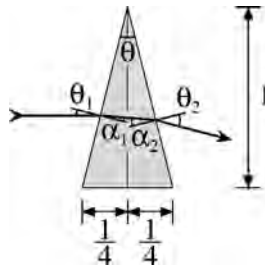
$$\alpha_1 + \alpha_1 = 50^\circ$$

$$\alpha_1 = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

Tomando este valor para  $\alpha_1$  se puede calcular el ángulo de incidencia

$$\theta_1 = \sin^{-1} (1,60 \sin(25^\circ)) = 42,5^\circ$$

**1.18** Un prisma tiene una sección transversal en la forma de un triángulo isósceles con una relación base/altura igual a 1/2. (A) Si un rayo de luz monocromática incide paralelo a la base y el índice de refracción para esa longitud de onda vale  $n = 1,50$ , ¿qué ángulo de desvío experimenta el rayo cuando atraviesa el prisma? (B) Al variar la longitud de onda el índice de refracción cambia a  $n' = 1,515$ . Calcule el incremento en el desvío.



(A) La situación es similar a la ilustrada en el Prob. 1.17, pero aquí se tiene un ángulo  $\theta$  en el lugar de los  $50^\circ$ . Para calcular el ángulo en el ápice, note que la altura y la mitad de la base forman un triángulo rectángulo con un ángulo igual a  $\theta/2$  en el vértice superior. Luego

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\theta = 2 \tan^{-1}(0,25) = 28,08^\circ$$



Si se requiere que el rayo incidente sea paralelo a la base, entonces el ángulo  $\theta_1$  debe ser igual a  $\theta/2$ , es decir,  $\theta_1 = 14,04^\circ$ . A continuación, se calculan los ángulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\theta_2$  como en el Prob. 1.17

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin \theta_1}{n}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(14,04^\circ)}{1,50}\right) = 9,31^\circ \\ \alpha_2 = \theta - \alpha_1 = 28,08^\circ - 9,31^\circ = 18,77^\circ \\ \theta_2 = \sin^{-1}(n \sin \alpha_2) = \sin^{-1}(1,50 \sin(18,77^\circ)) = 28,86^\circ \end{cases}$$

El ángulo total  $\phi$  se determina sumando los desvíos producidos por las refracciones en la primera cara ( $= \theta_1 - \alpha_1$ ) y en la segunda cara ( $= \theta_2 - \alpha_2$ )

$$\begin{aligned} \phi &= (\theta_1 - \alpha_1) + (\theta_2 - \alpha_2) = \theta_1 + \theta_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) = \theta_1 + \theta_2 - \theta \\ &= \theta_1 + \theta_2 - 2\theta_1 = \theta_2 - \theta_1 = 28,86^\circ - 14,04^\circ = 14,82^\circ \end{aligned}$$

**(B)** De forma análoga se obtienen los siguientes valores al sustituir  $n$  por  $n'$

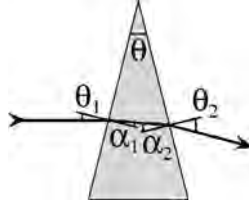
$$\begin{cases} \alpha'_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin \theta_1}{n'}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(14,04^\circ)}{1,515}\right) = 9,21^\circ \\ \alpha'_2 = \theta - \alpha'_1 = 28,08^\circ - 9,21^\circ = 18,87^\circ \\ \theta'_2 = \sin^{-1}(n' \sin \alpha'_2) = \sin^{-1}(1,515 \sin(18,87^\circ)) = 29,33^\circ \end{cases}$$

Con esto el nuevo ángulo de desvío es igual a

$$\phi' = \theta'_2 - \theta_1 = 29,33^\circ - 14,04^\circ = 15,29^\circ$$

El ángulo  $\phi$  se incrementa  $\approx 0,5^\circ$  cuando el índice de refracción sufre una variación de  $+1\%$ . En general, si luz blanca incide sobre un prisma, las diversas longitudes de onda que componen la luz son desviadas a ángulos diferentes y se produce una separación de colores.

**1.19** Un prisma delgado tiene un pequeño ángulo  $\theta$  en su ápice. Si el índice de refracción vale  $n$  y un rayo incide aproximadamente normal a la superficie, calcule el ángulo de desvío.



La geometría es parecida a la ilustrada en el Prob. 1.17 y nuevamente vale la relación  $\theta = \alpha_1 + \alpha_2$ .

Usando la ley de Snell en las refracciones, se encuentra que

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = n \sin \alpha_1 \rightarrow \theta_1 \approx n\alpha_1 \\ \sin \theta_2 = n \sin \alpha_2 \rightarrow \theta_2 \approx n\alpha_2 \end{cases}$$

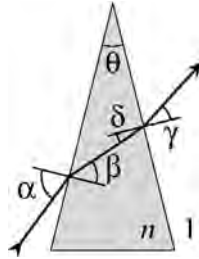
pues todos los ángulos son pequeños.

El ángulo de desvío total es igual a la suma de los desvíos en la primera y en la segunda superficies

$$\begin{aligned} \phi &= (\theta_1 - \alpha_1) + (\theta_2 - \alpha_2) \\ &\approx n\alpha_1 - \alpha_1 + n\alpha_2 - \alpha_2 \\ &= (n - 1) (\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= (n - 1) \theta \end{aligned} \tag{P 1.19.1}$$

En un experimento usualmente se conoce el ángulo  $\theta$  con el cual se construyó el prisma, y se mide el desvío  $\phi$  para diferentes longitudes de onda  $\lambda$ . Con esto se puede determinar el índice de refracción  $n(\lambda)$  del material.

**1.20** Repita el Prob. 1.19 si el ángulo de incidencia con la normal vale  $\alpha$ .



La situación se encuentra ilustrada en la Figura. Para responder la pregunta se requiere determinar la diferencia entre los desvíos  $\alpha - \beta$  en la primera refracción y  $\gamma - \delta$  en la segunda refracción.

Observe que, en comparación con los problemas anteriores, aquí el rayo final sale hacia *arriba* y es necesario cambiar los *sentidos* de los ángulos en la segunda refracción. Considerando la suma de los ángulos internos  $\theta$ ,  $90^\circ - \beta$  y  $90^\circ + \delta$  que aparecen en el triángulo, se deduce que

$$\begin{aligned}\theta + (90^\circ - \beta) + (90^\circ + \delta) &= 180^\circ \\ \theta &= \beta - \delta\end{aligned}\quad (\text{P 1.20.1})$$

A partir de la ley de Snell y sustituyendo  $\delta = \beta - \theta$  se encuentra lo siguiente

$$\begin{cases} \sin \alpha = n \sin \beta \\ \sin \gamma = n \sin \delta = n \sin(\beta - \theta) \approx n \sin \beta - n\theta \cos \beta \end{cases}$$

donde al final se usó la Ec. (A.7, 153) con  $\phi = \beta$  para realizar la aproximación. Luego

$$\sin \gamma \approx \sin \alpha - n\theta \cos \beta = \sin \alpha - n\theta \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cos \alpha$$

y definiendo  $\theta' = n\theta \cos \beta / \cos \alpha$

$$\sin \gamma \approx \sin \alpha - \theta' \cos \alpha \approx \sin(\alpha - \theta') = \sin\left(\alpha - n\theta \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)$$

pues  $\theta' \ll 1$ . Por lo tanto<sup>6</sup>

$$\gamma \approx \alpha - n\theta \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \alpha - \theta \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha} \quad (\text{P 1.20.2})$$

De las Ecs. (P 1.20.1) y (P 1.20.2) se concluye que el ángulo de desvío  $\phi$  vale

$$\begin{aligned} \phi &= (\alpha - \beta) - (\gamma - \delta) = (\alpha - \gamma) - (\beta - \delta) \\ &= \theta \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha} - \theta = \theta \left( \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha} - 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{P 1.20.3})$$

En particular para  $\alpha = 0$

$$\phi = \theta \left( \frac{\sqrt{n^2 - 0^2}}{1} - 1 \right) = \theta (n - 1)$$

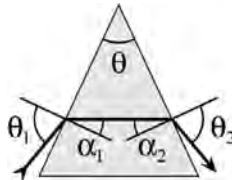
que coincide con la Ec. (P 1.19.1).

**1.21** *El índice de refracción de un prisma es igual a  $n$ . Calcule el ángulo máximo que puede tener el ápice para que un rayo de luz consiga atravesar el prisma, esto es, para que no sufra reflexión interna total en la segunda superficie.*

El ángulo crítico para la reflexión interna total está dado por la fórmula

$$\sin \alpha_{\text{cr}} = \frac{1}{n}$$

El ángulo  $\alpha_2$  debe ser menor que  $\alpha_{\text{cr}}$  para que la luz pueda escapar por la segunda superficie.

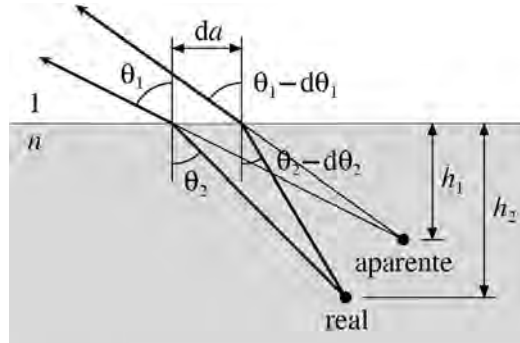


<sup>6</sup> Como  $\sin \alpha = n \sin \beta$

$$n \cos \beta = n \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{n^2 - (n \sin \beta)^2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

Por otro lado, el ángulo  $\alpha_1$  cuando la luz entra por la primera superficie nunca puede ser mayor que  $\alpha_{cr}$ . Como fue visto en el Prob. 1.17 el ángulo del ápice es  $\theta = \alpha_1 + \alpha_2$  (Ec. (P 1.17.1, 3I)), y ya que  $\alpha_1 \leq \alpha_{cr}$ ,  $\alpha_2 \leq \alpha_{cr}$  se obtiene que el máximo vale  $\theta_{max} = 2\alpha_{cr}$ . Observe que en este caso  $\theta_1 = \theta_2 \rightarrow 90^\circ$ , o sea, los rayos incidente y reflejado son tangentes a las superficies del prisma.

**1.22** Un objeto pequeño se ve dentro de una piscina a una profundidad aparente  $h_1$ . Sabiendo que el índice de refracción es  $n$  y que fuera del agua la luz se observa a un ángulo  $\theta_1$  con la normal, determine la profundidad real  $h_2$  a la que se encuentra el objeto.



Las profundidades  $h_1$  y  $h_2$  se pueden relacionar a través de la distancia infinitesimal  $da$  y de los ángulos que aparecen en la Figura. Considerando la imagen en la posición aparente se deduce que

$$da = h_1 [\tan \theta_1 - \tan(\theta_1 - d\theta_1)] \approx h_1 \frac{d\theta_1}{\cos^2 \theta_1}$$

pues para  $d\theta \ll 1$

$$\tan \theta - \tan (\theta - d\theta) \approx \frac{d(\tan \theta)}{d\theta} d\theta = \sec^2 \theta d\theta = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Análogamente, si se considera el objeto en la posición real

$$da \approx h_2 \frac{d\theta_2}{\cos^2 \theta_2}$$

Por lo tanto

$$h_1 \frac{d\theta_1}{\cos^2 \theta_1} = h_2 \frac{d\theta_2}{\cos^2 \theta_2}$$

$$h_2 = h_1 \frac{\cos^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_1} \frac{d\theta_1}{d\theta_2} \quad (\text{P 1.22.1})$$

Pero según la ley de Snell

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2 \quad (\text{P 1.22.2})$$

de manera que

$$\frac{d(\sin \theta_1)}{d\theta_1} \frac{d\theta_1}{d\theta_2} = n \frac{d(\sin \theta_2)}{d\theta_2}$$

$$\cos \theta_1 \frac{d\theta_1}{d\theta_2} = n \cos \theta_2$$

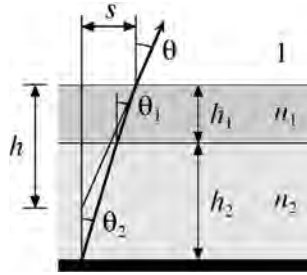
$$\frac{d\theta_1}{d\theta_2} = n \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}$$

Luego la Ec. (P 1.22.1) se puede colocar en la siguiente forma

$$h_2 = h_1 \frac{\cos^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_1} n \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = nh_1 \frac{\cos^3 \theta_2}{\cos^3 \theta_1}$$

donde el ángulo  $\theta_2$  se determina con la Ec. (P 1.22.2). En particular, como  $\theta_1 > \theta_2$  se deduce que  $\cos \theta_1 < \cos \theta_2$  y, por lo tanto,  $n \cos^3 \theta_2 / \cos^3 \theta_1 > 1$ , o sea, la profundidad real  $h_2$  es siempre mayor que la aparente  $h_1$ . Si el rayo de luz es rasante ( $\theta_1 \rightarrow 90^\circ$ ), entonces  $h_1 \rightarrow 0$ , lo que significa que la imagen se ve cerca de la superficie.

**1.23 Una capa de agua ( $n_1 = 1,33$ ) de espesor  $h_1 = 10$  mm flota sobre una capa de tetracloruro de carbono ( $n_2 = 1,46$ ) de espesor  $h_2 = 20$  mm. ¿A qué distancia  $h$  parece estar el fondo si se mira verticalmente hacia abajo?**



Ya que los ángulos son pequeños (pues  $\theta \rightarrow 0$  para una incidencia normal), la distancia horizontal  $s$  en la Figura vale aproximadamente

$$s = h_1 \tan \theta_1 + h_2 \tan \theta_2 \approx h_1 \theta_1 + h_2 \theta_2$$

Por otro lado, si se considera la profundidad aparente

$$s = h \tan \theta \approx h \theta$$

De esta forma se concluye que

$$h \theta = h_1 \theta_1 + h_2 \theta_2 = \frac{h_1}{n_1} n_1 \theta_1 + \frac{h_2}{n_2} n_2 \theta_2 \quad (\text{P 1.23.1})$$

Según la ley de Snell

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1 = 1 \sin \theta$$

y como se trata de ángulos pequeños

$$n_2 \theta_2 \approx n_1 \theta_1 \approx \theta$$

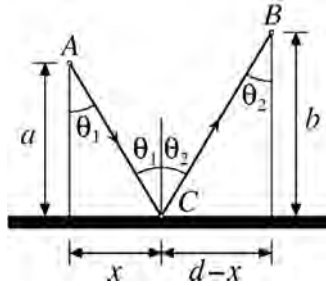
Eliminando  $n_1 \theta_1$  y  $n_2 \theta_2$  de la Ec. (P 1.23.1) resulta finalmente

$$h \theta = \frac{h_1}{n_1} \theta + \frac{h_2}{n_2} \theta$$

o bien,

$$h = \frac{h_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2} = \frac{10}{1,33} + \frac{20}{1,46} = 21,2 \text{ mm} \quad (\text{P 1.23.2})$$

**1.24** Determine cuánto deben valer  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en la Figura para que un rayo que se refleja en el espejo (punto C) viaje desde el punto A al punto B en el tiempo mínimo (principio de Fermat).



En un medio homogéneo, la luz viaja por una línea recta, o sea, entre los puntos A y C, y entre C y B. Esencialmente hay que encontrar la posición del punto C sobre el espejo (esto es, la distancia  $x$ ) para entonces calcular los ángulos.

Según el principio de Fermat, el tiempo que demora la luz en recorrer la distancia  $\overline{AC}$  más la distancia  $\overline{CB}$  debe ser mínimo. Estas distancias equivalen a las hipotenusas de los triángulos rectángulos, de manera que usando el teorema de Pitágoras

$$\begin{cases} \overline{AC} = [x^2 + a^2]^{1/2} \\ \overline{CB} = [(d-x)^2 + b^2]^{1/2} \end{cases}$$

La velocidad de la luz es igual a  $c/n$  y el tiempo total del recorrido vale

$$t = t_{AC} + t_{CB} = \frac{\overline{AC}}{\frac{c}{n}} + \frac{\overline{CB}}{\frac{c}{n}} = \frac{n}{c} [x^2 + a^2]^{1/2} + \frac{n}{c} [(d-x)^2 + b^2]^{1/2}$$

El mínimo se encuentra derivando esta Ec. con respecto al parámetro  $x$  e igualando el resultado a cero



$$\frac{dt}{dx} = \frac{n}{c} \frac{2x}{2[x^2 + a^2]^{1/2}} + \frac{n}{c} \frac{-2(d-x)}{2[(d-x)^2 + b^2]^{1/2}} = 0$$

$$\frac{x}{[x^2 + a^2]^{1/2}} = \frac{d-x}{[(d-x)^2 + b^2]^{1/2}} \quad (\text{P 1.24.2})$$

Observe que los senos de los ángulos que aparecen en la Figura son

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{x}{[x^2 + a^2]^{1/2}} \\ \sin \theta_2 = \frac{d-x}{[(d-x)^2 + b^2]^{1/2}} \end{cases}$$

de tal forma que la Ec. (P 1.24.1) implica

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2$$

o bien,

$$\theta_1 = \theta_2$$

que es la ley de la reflexión.

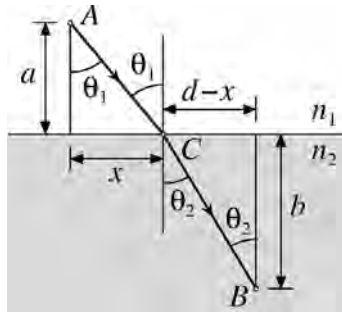
Si se desea determinar la posición del punto C explícitamente, note que de acuerdo con la última Ec.  $\tan \theta_1 = \tan \theta_2$ , o sea,

$$\frac{x}{a} = \frac{d-x}{b}$$

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) x = \frac{d}{b}$$

$$x = \frac{a}{a+b} d$$

**1.25** Calcule el valor de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , de modo que el rayo de luz que se refracta en C viaje entre los puntos A y B en un tiempo mínimo (principio de Fermat). Los índices de refracción de los medios superior e inferior son  $n_1$  y  $n_2$ , respectivamente.



Al igual que en el Prob. 1.24, la luz viaja por una línea recta entre los puntos A y C, y entre C y B, pues ambos medios son homogéneos. Para responder la pregunta se debe entonces determinar el valor de  $x$  que minimiza el tiempo.

Las distancias  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$  se calculan usando otra vez el teorema de Pitágoras, pero aquí la velocidad de la luz en el primer tramo vale  $c/n_1$ , mientras que en el segundo tramo  $c/n_2$

$$t = t_{AC} + t_{CB} = \frac{\overline{AC}}{\frac{c}{n_1}} + \frac{\overline{CB}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_1}{c} [x^2 + a^2]^{1/2} + \frac{n_2}{c} [(d-x)^2 + b^2]^{1/2}$$

Para calcular el mínimo se iguala la derivada a cero

$$\frac{dt}{dx} = \frac{n_1}{c} \frac{2x}{2[x^2 + a^2]^{1/2}} + \frac{n_2}{c} \frac{-2(d-x)}{2[(d-x)^2 + b^2]^{1/2}} = 0$$

$$n_1 \frac{x}{[x^2 + a^2]^{1/2}} = n_2 \frac{d-x}{[(d-x)^2 + b^2]^{1/2}}$$

Los senos de los ángulos en la Figura son

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{x}{[x^2 + a^2]^{1/2}} \\ \sin \theta_2 = \frac{d-x}{[(d-x)^2 + b^2]^{1/2}} \end{cases}$$

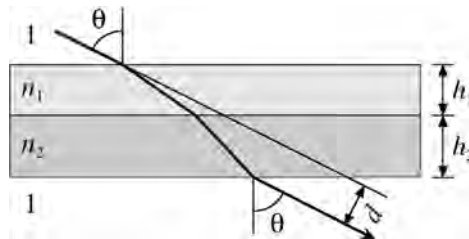
de tal forma que

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Esta fórmula coincide con la ley de Snell.

## 1.2 Problemas propuestos

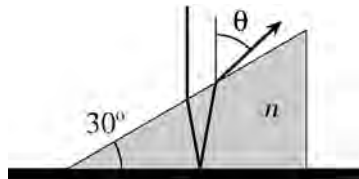
**1.26** Luz incide desde el aire sobre un par de placas de espesores  $h_1$ ,  $h_2$  e índices de refracción  $n_1$ ,  $n_2$ . Si el ángulo de incidencia es  $\theta$ , calcule el desvío lateral  $d$  experimentado por el rayo cuando atraviesa las placas.



Resp.

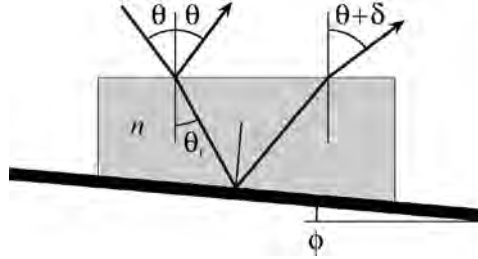
$$d = \sin \theta \left[ h_1 \left( 1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta}} \right) + h_2 \left( 1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta}} \right) \right]$$

**1.27** Un prisma con un índice de refracción  $n = 1,5$  se encuentra sobre un espejo plano. Calcule el ángulo  $\theta$  entre el rayo incidente y el rayo reflejado.



Resp.  $\theta = 47,1^\circ$

**1.28** Una cuña se fabrica con un material cuyo índice de refracción vale  $n$ . La cuña tiene un pequeño ángulo  $\phi$  entre sus caras opuestas y se encuentra sobre un espejo plano. Si luz incide formando un ángulo  $\theta$  con la normal, ¿qué ángulo  $\delta$  hay entre el rayo reflejado parcialmente en la superficie de la refringente y el rayo reflejado por el espejo?



Resp.

$$\delta = 2n\phi \frac{\cos \theta_r}{\cos \theta} = 2\phi \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta}$$

**1.29 (A)** La trayectoria de un rayo de luz está dada por la siguiente Ec.

$$y = y_0 e^{x/a}$$

Determine cómo varía el índice de refracción  $n$  con la altura  $y$ .

**(B)** Se emite un segundo rayo que pasa por el punto  $(0, y_0)$  y que forma un ángulo

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left( c \frac{y_0}{a} \right)$$

con el eje  $x$ . Sabiendo que  $c$  es una constante positiva, calcule la trayectoria. ¿Qué sucede cuando  $c = 1$ ?

Grafique  $y(x)$  en el intervalo  $-2a < x < 2a$  para  $y_0 = a$  y **(C)**  $c = 0,5$ , **(D)**  $c = 1$ , **(E)**  $c = 1,5$ .

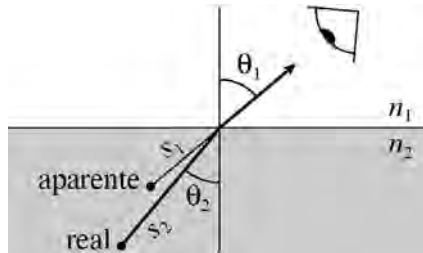
Resp. (A)  $n = n_0 \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}}$

(B)  $y = y_0 \left[ \cosh \left( \gamma \frac{x}{a} \right) + \frac{c}{\gamma} \sinh \left( \gamma \frac{x}{a} \right) \right]$  siendo  $\gamma = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 y_0^2}{a^2 + y_0^2}}$

**1.30** Demuestre que las distancias aparente  $s_1$  (desde la imagen hasta la superficie refringente) y real  $s_2$  (que recorre el rayo desde el objeto hasta la superficie) se relacionan con la fórmula

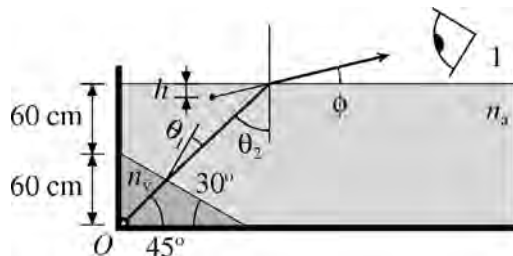
$$\frac{s_1}{n_1 \cos^2 \theta_1} = \frac{s_2}{n_2 \cos^2 \theta_2}$$

donde  $n_1, n_2$  representan los índices de refracción de los dos medios y  $\theta_1, \theta_2$  los ángulos ilustrados en la Figura. ¿Cuánto vale  $s_1$  en el caso de una incidencia normal?



Resp.  $s_1 = s_2 n_1 / n_2$

**1.31** Un prisma de vidrio ( $n_v = 1,5$ ) se encuentra inmerso en una piscina con agua ( $n_a = 1,33$ ). Un pequeño objeto  $O$  localizado en la esquina del prisma emite un rayo de luz a un ángulo de  $45^\circ$  como es ilustrado en la Figura.



**(A) Determine el ángulo  $\phi$  que forma el rayo con la horizontal fuera del agua. (B) Calcule la profundidad aparente  $h$  del objeto.**

Sug. Obtenga primero la distancia aparente cuando la luz se transmite del vidrio al agua (Probl. 1.30) y, luego, la profundidad aparente al salir del agua (Prob. 1.22).

Resp.  $\phi = 13,5^\circ$ ,  $h = 3,32$  cm

## CAPÍTULO 2

### ESPEJOS

La formación de imágenes por espejos se explica usando la ley de reflexión que se abordó en el Capítulo 1. En el estudio resulta conveniente establecer una nomenclatura para clasificar los diferentes tipos de imágenes que se pueden formar.

- Imagen real: la luz pasa físicamente por el punto donde se forma la imagen.
- Imagen virtual: la luz no pasa por el punto donde aparece la imagen, sino que las prolongaciones de los rayos se comportan como si provinieran desde la imagen.
- Imagen directa: la imagen tiene el mismo sentido que el objeto.
- Imagen invertida: la imagen está en el sentido inverso (*cabeza vuelta para abajo*).

En un espejo plano la imagen se ve al otro lado, es virtual y directa (Fig. 2.1). La distancia entre la imagen y el espejo es la misma que entre el espejo y el objeto. Además la imagen y el objeto son del mismo tamaño.

De la misma manera, en espejos esféricos se requiere averiguar dónde se forma la imagen, su tamaño y su sentido con respecto al objeto. Estos espejos se caracterizan por su concavidad y por su radio.

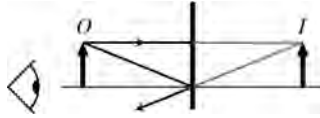


Figura 2.1: Espejo plano: imagen  $I$  formada por un objeto  $O$ . El objeto y el observador se encuentran al mismo lado del espejo.

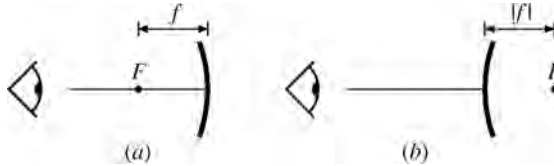


Figura 2.2: Espejo esférico (a) cóncavo  $f > 0$  y (b) convexo  $f < 0$ . El punto  $F$  indica la posición del foco y  $f$  representa la distancia focal.

- Espejo cóncavo (Fig. 2.2 (a)): el centro del radio de curvatura está en el mismo lado que incide la luz.
- Espejo convexo (Fig. 2.2 (b)): el centro del radio de curvatura se encuentra al lado opuesto del que incide la luz.
- Foco: es el punto donde convergen rayos paralelos<sup>1</sup> cuando inciden sobre un espejo esférico. Para un espejo cóncavo éste se halla al mismo lado que se mira el espejo y la distancia focal es por definición positiva

$$f = +\frac{r}{2} \quad (2.1)$$

donde  $r$  representa el radio de curvatura del espejo. En el caso de un espejo convexo, el foco está al otro lado y la distancia focal es negativa

$$f = -\frac{r}{2} \quad (2.2)$$

En particular, para un espejo plano  $f = \infty$ .

<sup>1</sup> Como si fueran provenientes de un punto luminoso (objeto) localizado en el *infinito*.



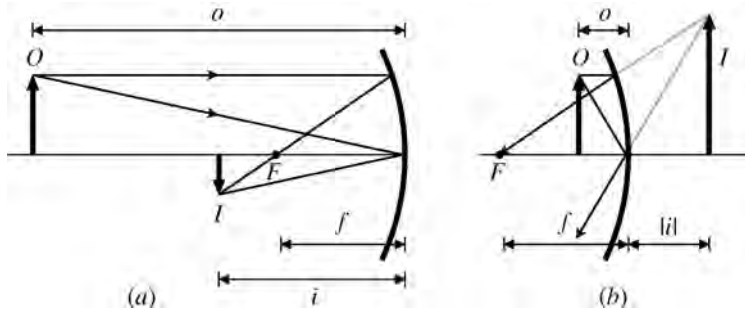


Figura 2.3: Un objeto  $O$  frente a un espejo cóncavo con foco en  $F$  ( $f > 0$ ) produce una imagen  $I$ . (a) Se ilustra una situación en que  $o > f, i > 0$  (imagen real) y  $m < 0$  (imagen invertida). Observe que los rayos emitidos por el objeto y reflejados en el espejo, se intersectan donde se forma la imagen. (b) Para  $0 < o < f$  se obtiene  $i < 0$  (imagen virtual) y  $m > 1$  (imagen directa mayor que el objeto). En este caso las prolongaciones de los rayos reflejados se cruzan en el punto donde está la imagen.

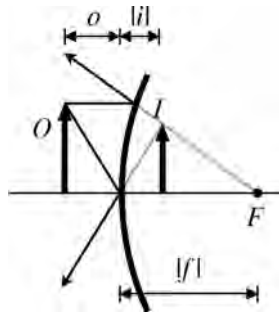


Figura 2.4: Un objeto  $O$  delante de un espejo convexo con foco en  $F$  ( $f < 0$ ) produce una imagen  $I$ . Para  $o > 0$  el resultado siempre es  $i < 0$  (imagen virtual) y  $0 < m < 1$  (imagen directa menor que el objeto). Las prolongaciones de los rayos reflejados se intersectan en la imagen.

- **Posiciones del objeto y de la imagen:** la distancia  $o$  entre el objeto y el espejo se considera positiva (negativa) cuando el objeto se encuentra a la izquierda (derecha). La misma convención de signos se aplica para la distancia  $i$  entre la imagen y el espejo. Para una imagen real  $i > 0$ , al paso que para una imagen virtual  $i < 0$ . La Ec. del espejo relaciona la posición del objeto, la posición de la imagen y la distancia focal

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \quad (2.3)$$

Esta también se conoce como fórmula de Descartes para espejos esféricos y se obtiene cuando se hace la aproximación paraxial.<sup>2</sup> Note que si el objeto se mueve a la posición donde aparece la imagen ( $o \rightarrow i$ ), entonces la imagen aparecerá en la posición donde estaba el objeto ( $i \rightarrow o$ ), es decir, se intercambian las posiciones.

Para un espejo plano ( $1/f = 0$ ) resulta  $i = -o$  (módulo de la distancia igual, pero al otro lado del espejo).

- **Amplificación lateral:** su módulo se define como la altura de la imagen dividida por la altura del objeto. La amplificación se calcula con la fórmula

$$m = -\frac{i}{o} \quad (2.4)$$

Para  $m > 0$  se obtiene una imagen directa (mismo sentido que el objeto como en las Figs. 2.3 (b) y 2.4), al paso que  $m < 0$  significa que la imagen se encuentra invertida (Fig. 2.3 (a)).

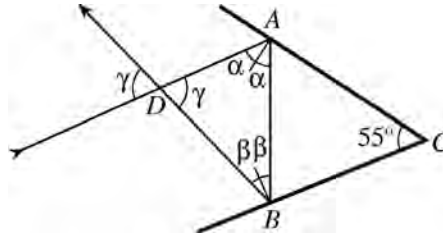
En el caso de un espejo plano ( $i = -o$ ) la amplificación vale  $m = 1$ , lo que corresponde a una imagen directa con el mismo tamaño que el objeto.

La amplificación resultante de un sistema compuesto por varios espejos está dada por el producto de las amplificaciones que produce cada espejo.

## 2.1. Problemas resueltos

**2.1 Dos espejos planos AC y BC se unen de tal forma que el ángulo entre ellos es  $55^\circ$ . Si un rayo de luz incide formando un ángulo  $\alpha = 33^\circ$  con la normal del espejo AC, calcule el ángulo  $\gamma$  entre el rayo incidente y el reflejado.**

<sup>2</sup> Es decir, cuando los rayos se propagan aproximadamente paralelos al eje de simetría del espejo.



En el triángulo  $ABC$  los ángulos internos son  $90^\circ - \alpha$ ,  $90^\circ - \beta$  y  $55^\circ$ . Como la suma de estos ángulos vale  $180^\circ$ , se concluye que

$$(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 55^\circ \quad (\text{P 2.1.1})$$

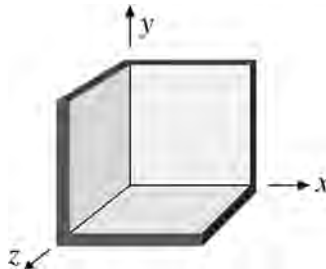
Por otra parte, en el triángulo  $ABD$  los ángulos internos son  $2\alpha$ ,  $2\beta$  y  $\gamma$ , de tal forma que

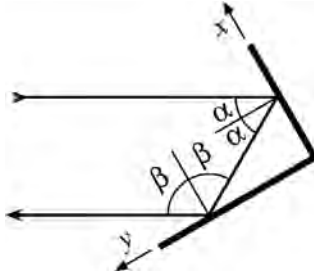
$$2\alpha + 2\beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 2(\alpha + \beta) = 180^\circ - 2 \times 55^\circ = 70^\circ \quad (\text{P 2.1.2})$$

Note que el resultado es independiente de  $\alpha$ , siempre y cuando este ángulo sea menor que  $55^\circ$ . Si no fuese así,  $\beta$  sería negativo y el último rayo saldría hacia la derecha, al revés de lo que indica la Figura. En este caso se necesitaría considerar reflexiones adicionales para responder la pregunta.

**2.2 Un diedro consta de tres espejos planos unidos entre sí como la esquina de un cubo. ¿Qué relación existe entre el rayo incidente y el rayo que se devuelve, si ocurre una reflexión en cada uno de los espejos?**





Considere primero el problema en dos dimensiones, como en el plano  $xy$  ilustrado en la Figura. De forma análoga a la Ec. (P 2.1.1) se deduce que  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Luego, el ángulo  $\gamma$  entre el rayo incidente y el reflejado es igual a (Ec. (P 2.1.2))

$$\gamma = 180^\circ - 2(\alpha + \beta) = 180^\circ - 2 \times 90^\circ = 0^\circ$$

O sea, los rayos son paralelos, pero se propagan en sentidos opuestos.

Para obtener la trayectoria en tres dimensiones basta analizar la proyección de los rayos en dos planos ortogonales, pues si se conocen la coordenada  $(x, y)$  y la coordenada  $(y, z)$ , entonces se conoce  $(x, y, z)$ . En particular, cuando se observa la proyección de los rayos en un plano, los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales. Esto significa que el análisis en dos dimensiones se puede aplicar aquí también.

El diedro está compuesto por tres caras  $A, B, C$  mutuamente perpendiculares. Suponiendo que el rayo incide primero en la cara  $A$  y luego en la  $B$ , la proyección vista en un plano paralelo a  $C$  da como resultado un rayo que se devuelve en la dirección opuesta.<sup>3</sup> Lo mismo sucede si se consideran las reflexiones en las caras  $B$  y  $C$ , y se grafica la trayectoria en un plano paralelo a  $A$ . Ya que la trayectoria final tiene la misma dirección pero sentido opuesto cuando se observa en dos planos ortogonales, se concluye que en tres dimensiones el rayo retorna paralelo al incidente.

<sup>3</sup> Note que la tercera reflexión en  $C$  no altera la trayectoria vista en un plano paralelo a  $C$ .

**2.3 Un espejo produce una imagen real cuatro veces menor que el objeto. Si la imagen se encuentra a 30 cm del objeto, halle la distancia focal del espejo.**

Ya que se trata de una imagen real,  $i$  debe ser mayor que cero y la ampliación es negativa  $m = -1/4$ . Luego

$$-\frac{1}{4} = -\frac{i}{o}$$

$$i = \frac{o}{4}$$

lo que indica que  $o > i$  y por lo tanto  $|o - i| = o - i$ . Según el enunciado, la separación entre el objeto y la imagen vale 30 cm

$$30 = o - i = o - \frac{o}{4} = \frac{3}{4} o$$

o sea, la posición del objeto es igual a

$$o = \frac{4}{3} 30 = 40 \text{ cm}$$

Con este resultado se puede calcular dónde está la imagen

$$i = \frac{o}{4} = \frac{40}{4} = 10 \text{ cm}$$

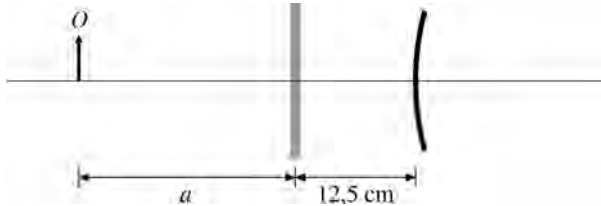
Por último, la distancia focal se obtiene usando la fórmula de Descartes

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{40} + \frac{1}{10} = \frac{1+4}{40}$$

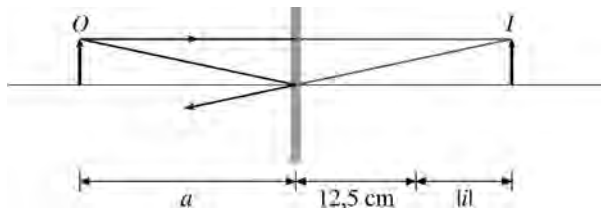
$$f = \frac{40}{5} = 8 \text{ cm}$$

El valor positivo indica que se trata de un espejo cóncavo.

**2.4 Una placa de vidrio parcialmente reflectora se encuentra a 12,5 cm de un espejo convexo de radio 28 cm. ¿Cuál debe ser el valor de la distancia  $a$  en la Figura para que las posiciones de las imágenes formadas por la placa y el espejo coincidan?**



Primero hay que considerar la imagen formada por la placa, lo que se ilustra en la Figura a continuación. Las prolongaciones de los rayos reflejados indican dónde se forma la imagen virtual.



La separación  $a$  entre la placa de vidrio y el objeto es igual a la separación  $12,5 + |i| = 12,5 - i$  que hay entre la placa y la imagen, o sea,  $a = 12,5 - i$ . Despejando  $i$

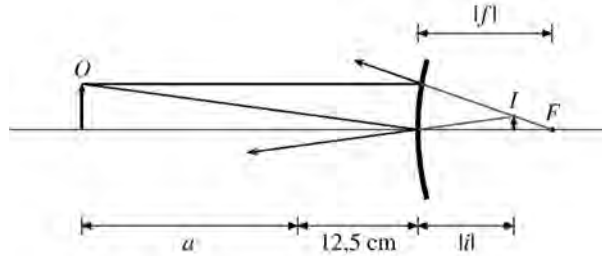
$$i = 12,5 - a$$

La Figura que sigue muestra la imagen virtual ( $i < 0$ ) formada por el espejo esférico. La posición del objeto relativa al espejo vale  $o = 12,5 + a$ . La distancia focal del espejo convexo está dada por

$$f = -\frac{r}{2} = -\frac{28}{2} = -14 \text{ cm}$$

Reemplazando  $f$ ,  $o$  e  $i$  en la en la fórmula de Descartes se obtiene finalmente

$$\frac{1}{-14} = \frac{1}{12,5 + a} + \frac{1}{12,5 - a} = \frac{25}{(12,5)^2 - a^2}$$

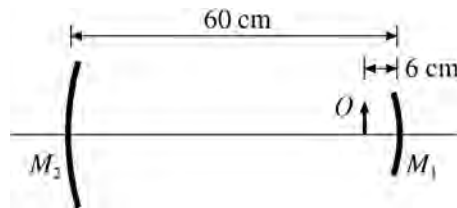


$$(12,5)^2 - a^2 = -14 \times 25 = -350$$

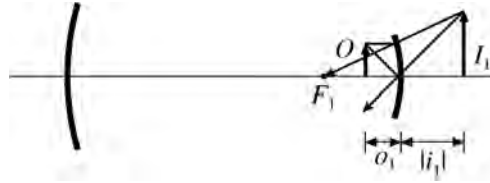
$$\alpha = \sqrt{156,25 + 350} = 22,5 \text{ cm}$$

Note que las imágenes formadas por la placa de vidrio y el espejo se encuentran en la misma posición, son directas, pero el tamaño de la imagen formada por el espejo es menor.

**2.5** Dos espejos cóncavos  $M_1$  y  $M_2$  con radios de curvatura  $r_1 = 24$  cm y  $r_2 = 48$  cm, respectivamente, se encuentran separados por una distancia de 60 cm. Un objeto  $O$  está localizado a 6 cm de  $M_1$ . (A) ¿Dónde se encuentra la imagen  $I_2$  formada por una reflexión en  $M_1$  y una reflexión en  $M_2$ ? (B) ¿Cuál es su amplificación? (C) Determine la imagen  $I_3$  después de otra reflexión en  $M_1$ .



(A) Las distancias focales de los espejos cóncavos son  $f_1 = +r_1/2 = 12$  cm y  $f_2 = +r_2/2 = 24$  cm. La primera reflexión está ilustrada en la Figura a continuación.

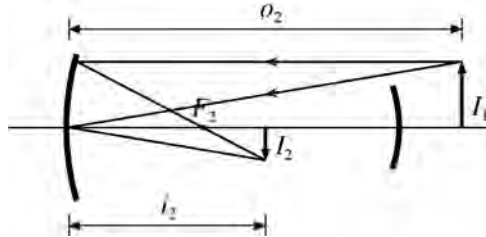


La posición del objeto inicial es  $o_1 = 6$  cm, con lo que la primera imagen se encuentra en

$$\frac{1}{i_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{o_1} = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}$$

$$i_1 = -12 \text{ cm}$$

o sea, se forma 12 cm a la derecha de  $M_1$ .



Como después de la primera reflexión la luz se propaga hacia la izquierda, se invierte la convención de signos y la posición del segundo objeto (= primera imagen) con respecto a  $M_2$  es  $o_2 = 60 + 12 = 72$  cm. Luego

$$\frac{1}{i_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{o_2} = \frac{1}{24} - \frac{1}{72} = \frac{3-1}{72}$$

$$i_2 = \frac{72}{2} = 36 \text{ cm}$$

Por lo tanto, la imagen  $I_2$  se encuentra 36 cm a la derecha de  $M_2$  y a  $60 - 36 = 24$  cm de  $M_1$ .

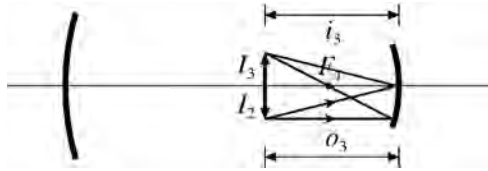
**(B)** La amplificación total se obtiene multiplicando las amplificaciones debido a la reflexión en  $M_1$  y a la reflexión  $M_2$



$$m = m_1 m_2 = \left( -\frac{i_1}{o_1} \right) \left( -\frac{i_2}{o_2} \right) = \frac{12}{6} \left( -\frac{36}{72} \right) = -1$$

Así, se concluye que  $I_2$  tiene el mismo tamaño que el objeto inicial  $O$ , pero se encuentra invertida.

(C) En esta etapa la luz se propaga nuevamente hacia la derecha y la convención de signos vuelve a ser la habitual.



De esta forma  $o_3 = 24$  cm y la posición de  $I_3$  vale

$$\frac{1}{i_3} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{o_3} = \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

$$i_3 = 24 \text{ cm}$$

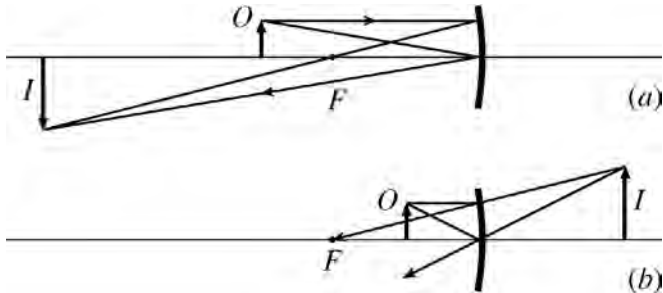
La tercera imagen coincide con  $I_2$ , pero ocurre una inversión en el sentido pues  $m_3 = -i_3/o_3 = -1$ . Si se considerara una reflexión adicional en  $M_2$  y otra en  $M_1$  (lo que equivale a la trayectoria inversa del ítem (A)), se volvería a la posición del objeto inicial pero con la imagen invertida. Esto se deja como ejercicio para que el lector lo desarrolle.

**2.6 Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura de 48 cm. Cuando una persona lo usa mientras se afeita, observa que el tamaño de la imagen de su cara es 2 veces el tamaño real. ¿A qué distancia se encuentra del espejo?**

Como se trata de un espejo cóncavo, la distancia focal es positiva y vale la mitad del radio

$$f = +\frac{r}{2} = 24 \text{ cm}$$

Según el enunciado, el módulo de la amplificación vale  $|m| = |i|/o = 2$ . Si  $i$  fuese mayor que cero, entonces  $i = 2o$  y la imagen se formaría en una posición atrás de la retina,<sup>4</sup> de modo que la persona no vería su cara sino que algo borroso.<sup>5</sup> Además, en este caso, la imagen aparecería invertida ( $m = -i/o < 0$ ).



Así, se concluye que  $i$  debe ser negativo (Fig. (b)), pues de esta manera la imagen se ve *dentro* del espejo y es directa ( $m = -i/o > 0$ ). Luego

$$2 = -\frac{i}{o}$$

$$\frac{1}{i} = -\frac{1}{2o}$$

Sustituyendo los valores de  $f$  e  $i$  en la fórmula de Descartes se obtiene

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{o} - \frac{1}{2o} = \frac{1}{2o}$$

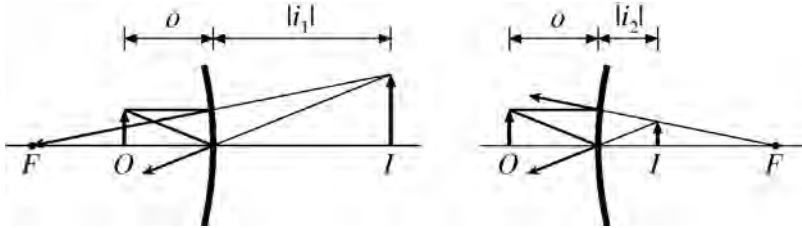
$$o = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}$$

o sea, la cara debe posicionarse a 12 cm del espejo.

<sup>4</sup> Note que la posición del observador coincide con la posición del objeto, el cual está a la derecha de la imagen en la Fig. (a).

<sup>5</sup> Para poder ver una imagen nítida es necesario que ésta se encuentre a una distancia positiva mayor que 25 cm (Prob. 4.2).

**2.7 Una superficie esférica funciona como espejo por ambos lados. Una persona mira su cara desde un lado y la imagen se forma 30 cm detrás del espejo. Al invertir el espejo, manteniéndolo en la misma posición, observa que la imagen aparece 10 cm detrás del espejo. Calcule la distancia espejo-cara y el radio de curvatura del espejo.**



Despejando  $i_n$  en la fórmula de Descartes, se encuentra la siguiente fórmula válida para una imagen virtual ( $i_n < 0$ )

$$|i_n| = -i_n = \frac{f_n o}{f_n - o}$$

donde  $o$  representa la posición del objeto y  $f_n$  la distancia focal. En este problema existe una situación en que el espejo es cóncavo ( $f_1 = f > 0$ ) y otra en que es convexo ( $f_2 = -f < 0$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} |i_1| = \frac{f_1 o}{f_1 - o} = \frac{fo}{f - o} \\ |i_2| = \frac{f_2 o}{f_2 - o} = \frac{-fo}{-f - o} = \frac{fo}{f + o} \end{array} \right.$$

Como  $f$ ,  $o$  e  $|i_1|$  son todos positivos, es necesario que  $f - o > 0$ . Luego  $f + o > f - o > 0$  y así se concluye que

$$\frac{1}{f - o} > \frac{1}{f + o}$$

Multiplicando la última Ec. por  $fo > 0$

$$\frac{fo}{f - o} > \frac{fo}{f + o}$$

Por lo tanto  $|i_1| > |i_2|$ , o sea, para el espejo cóncavo se debe usar  $i_1 = -30$  cm y para el convexo  $i_2 = -10$  cm. Reemplazando estos datos en la fórmula de Descartes se obtiene que

$$\begin{cases} \frac{1}{o} + \frac{1}{-30} = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} \\ \frac{1}{o} + \frac{1}{-10} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{-f} \end{cases} \quad (\text{p 2.7.1})$$

Sumando miembro a miembro estas Ecs. se determina la posición del objeto, que es igual a la distancia entre la cara y el espejo

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{o} - \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{o} - \frac{1}{10}\right) &= \frac{1}{f} - \frac{1}{f} = 0 \\ \frac{2}{o} &= \frac{1}{30} + \frac{1}{10} = \frac{1+3}{30} \\ o &= \frac{2 \times 30}{4} = 15 \text{ cm} \end{aligned}$$

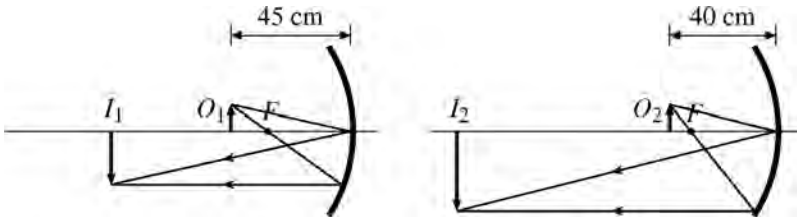
Finalmente, sustituyendo  $o$  en la Ec. (P 2.7.1) se calcula la distancia focal

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{o} + \frac{1}{-30} = \frac{1}{15} - \frac{1}{30} = \frac{1}{30} \\ f &= 30 \text{ cm} \end{aligned}$$

El radio de curvatura  $r$  de un espejo cóncavo es igual al doble de la distancia focal

$$r = 2f = 2 \times 30 = 60 \text{ cm}$$

**2.8** Cuando un objeto a 45 cm de un espejo esférico se mueve 5 cm en dirección al espejo, la separación entre el objeto y la imagen aumenta por un factor  $16/9$ . (A) Sabiendo que las imágenes se encuentran a la izquierda de los respectivos objetos, determine la distancia focal del espejo. ¿Son posibles los casos en que (B) una imagen está a la izquierda y la otra a la derecha o (C) ambas imágenes están a la derecha?



(A) Partiendo de la fórmula de Descartes se puede expresar la separación entre el objeto y la imagen en la siguiente forma

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = \frac{o-f}{of}$$

$$i - o = \frac{of}{o-f} - o = o \frac{2f - o}{o-f}$$

que es positiva porque en ambos casos la imagen se encuentra a la izquierda del objeto ( $i > o$ ). Considerando las posiciones iniciales  $o_1 = 45$  cm,  $i_1$  y finales  $o_2 = 45 - 5 = 40$  cm,  $i_2$  se obtiene

$$\begin{cases} i_1 - 45 = 45 \frac{2f - 45}{45 - f} > 0 \\ i_2 - 40 = 40 \frac{2f - 40}{40 - f} > 0 \end{cases} \quad (\text{P 2.8.1})$$

Como la separación entre el objeto y la imagen aumenta por un factor 16/9

$$\frac{i_2 - 40}{i_1 - 45} = \frac{16}{9} \quad (\text{P 2.8.2})$$

$$i_2 - 40 = \frac{16}{9} (i_1 - 45)$$

Sustituyendo (P 2.8.1) en la última igualdad

$$40 \frac{2f - 40}{40 - f} = \frac{16}{9} 45 \frac{2f - 45}{45 - f}$$

$$\frac{2f - 40}{40 - f} = 2 \frac{2f - 45}{45 - f}$$

$$\begin{aligned}
 (2f - 40)(45 - f) &= 2(2f - 45)(40 - f) \\
 -2f^2 + 130f - 1800 &= -4f^2 + 250f - 3600 \\
 2f^2 - 120f + 1800 &= 0 \\
 2(f - 30)^2 &= 0 \\
 f &= 30 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

lo que corresponde a un espejo cóncavo<sup>6</sup> pues la distancia focal es positiva. Por último, conociendo  $f$  se pueden determinar las posiciones de las imágenes

$$\begin{cases} i_1 = \frac{o_1 f}{o_1 - f} = \frac{45 \times 30}{45 - 30} = 90 \text{ cm} \\ i_2 = \frac{o_2 f}{o_2 - f} = \frac{40 \times 30}{40 - 30} = 120 \text{ cm} \end{cases}$$

lo que confirma que

$$\begin{cases} i_1 - o_1 = 90 - 45 = 45 \text{ cm} > 0 \\ i_2 - o_2 = 120 - 40 = 80 \text{ cm} > 0 \end{cases}$$

**(B)** Si una imagen estuviese a la izquierda y la otra a la derecha, entonces en la Ec. (P 2.8.2) se debería usar  $-16/9$  en el vez de  $16/9$ , pues uno de los valores  $i_1 - 45$  ó  $i_2 - 40$  sería positivo y el otro negativo. Procediendo de la misma forma se hallarían dos valores para la distancia focal:  $f_+ = 41,8$  cm y  $f_- = 21,5$  cm. Con  $f_+$  obtendría  $i_1 > 45$  cm e  $i_2 < 40$  cm, al tiempo que con  $f_-$  resultaría  $i_1 < 45$  cm e  $i_2 > 40$  cm. O sea, este caso sí puede ocurrir.

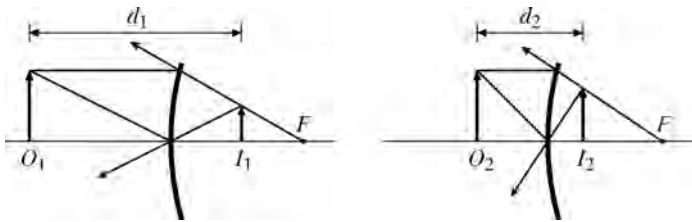
**(C)** Por último, si ambas imágenes se estuviesen a la derecha de los respectivos objetos ( $i_1 - o_1 < 0$ ,  $i_2 - o_2 < 0$ ), entonces nuevamente se encontrarían  $f =$

<sup>6</sup> En el Prob. 2.10 se demuestra que, si un objeto se aproxima a un espejo convexo, la imagen que es virtual se mueve en sentido contrario y se acerca al espejo. O sea, la separación entre el objeto y la imagen disminuye. Como en este problema la separación aumenta, se concluye que se trata de un espejo cóncavo.

Además, un objeto real frente a un espejo convexo produce siempre una imagen virtual, es decir, a la derecha del objeto, lo que no es el caso según el enunciado.

30 cm,  $i_1 = 90$  cm,  $i_2 = 120$  cm. Pero aquí se contradice que  $i_1 < o_1$  e  $i_2 < o_2$ , de modo que esta situación no es posible.

**2.9** Un objeto se aproxima 20 cm en dirección a un espejo convexo y se observa que el tamaño de la imagen crece 50%. Si la distancia entre el objeto y la imagen disminuye en 27,5 cm, determine el radio del espejo.



Las posiciones inicial  $o_1$  y final  $o_2$  se relacionan por medio de la siguiente Ec.

$$o_1 - o_2 = 20 \text{ cm} \quad (\text{P 2.9.1})$$

pues el objeto se aproxima al espejo, es decir,  $o_1 > o_2$ . Para un espejo convexo la imagen es siempre virtual ( $i < 0$ ) y se encuentra a la derecha del objeto. Por lo tanto, las distancias inicial y final entre el objeto y la imagen valen  $d_1 = o_1 - i_1$  y  $d_2 = o_2 - i_2$ , respectivamente. Como la separación disminuye en 27,5 cm, se deduce que  $d_1 > d_2$  y

$$27,5 = d_1 - d_2 = o_1 - i_1 - (o_2 - i_2)$$

esto es,

$$i_2 - i_1 = 27,5 - (o_1 - o_2) = 27,5 - 20 = 7,5 \text{ cm} \quad (\text{P 2.9.2})$$

Las posiciones al comienzo  $o_1, i_1$  y al final  $o_2, i_2$  satisfacen la fórmula de Descartes

$$\begin{cases} \frac{1}{o_1} + \frac{1}{i_1} = \frac{1}{f} \\ \frac{1}{o_2} + \frac{1}{i_2} = \frac{1}{f} \end{cases} \quad (\text{P 2.9.3})$$

de manera que

$$\frac{1}{o_1} + \frac{1}{i_1} = \frac{1}{o_2} + \frac{1}{i_2}$$

$$\frac{1}{i_1} - \frac{1}{i_2} = \frac{1}{o_2} - \frac{1}{o_1}$$

$$\frac{i_2 - i_1}{i_1 i_2} = \frac{o_1 - o_2}{o_1 o_2}$$

Sustituyendo (P 2.9.1) y (P 2.9.2) en la última Ec. se encuentra que

$$\frac{7,5}{i_1 i_2} = \frac{20}{o_1 o_2}$$

$$\frac{i_2}{o_2} = \frac{7,5}{20} \frac{o_1}{i_1} = 0,375 \frac{o_1}{i_1}$$

Las ampliaciones antes y después están dadas por  $m_1 = -i_1/o_1$  y  $m_2 = -i_2/o_2$ , respectivamente, de tal forma que

$$m_2 = -\frac{i_2}{o_2} = -0,375 \frac{o_1}{i_1} = \frac{0,375}{-\frac{i_1}{o_1}} = \frac{0,375}{m_1}$$

Según el enunciado del Problema, la imagen crece 50% y, como el tamaño del objeto no varía, se concluye que la ampliación también aumenta un 50%

$$m_2 = m_1 + 0,50 m_1 = 1,5 m_1 \quad (\text{P 2.9.4})$$

Luego

$$1,5 m_1 = \frac{0,375}{m_1}$$

$$m_1^2 = \frac{0,375}{1,5} = 0,25$$

$$m_1 = 0,5$$

pues para un objeto real la ampliación de un espejo convexo es positiva.



Habiendo calculado  $m_1$ , se puede proceder a determinar las otras variables que aparecen en el problema. Usando la Ec. (P 2.9.4) se deduce que  $m_2 = 1,5 \times 0,5 = 0,75$ . Así

$$\begin{cases} i_1 = -m_1 o_1 = -0,5 o_1 \\ i_2 = -m_2 o_2 = -0,75 o_2 \end{cases} \quad (\text{P 2.9.5})$$

Reemplazando  $i_1$  e  $i_2$  en la Ec. (P 2.9.2) se encuentra que

$$\begin{aligned} -0,75 o_2 + 0,5 o_1 &= 7,5 \\ o_1 &= \frac{7,5 + 0,75 o_2}{0,5} = 15 + 1,5 o_2 \end{aligned}$$

Insertando este resultado en la Ec. (P 2.9.1)

$$\begin{aligned} 20 &= o_1 - o_2 = 15 + 1,5 o_2 - o_2 = 15 + 0,5 o_2 \\ o_2 &= \frac{20 - 15}{0,5} = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

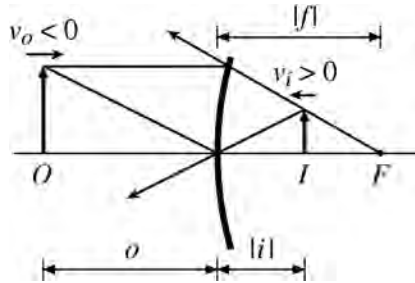
De acuerdo con la Ec. (P 2.9.5) se tiene  $i_2 = -0,75 o_2 = -7,5$  cm, lo que finalmente permite determinar la distancia focal (Ec. (P 2.9.3))

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{o_2} + \frac{1}{i_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{-7,5} = \frac{7,5 - 10}{75} \\ f &= \frac{75}{-2,5} = -30 \text{ cm} \end{aligned}$$

En un espejo convexo la distancia focal es negativa y su radio de curvatura se calcula multiplicando por dos el módulo de esta distancia:  $r = 2 |f| = 60$  cm.

**2.10 Un objeto se mueve con velocidad  $v_o$  hacia un espejo convexo de radio  $r$ . Calcule la velocidad de la imagen cuando el objeto se encuentra a una distancia  $o$  del espejo.**

La distancia focal del espejo convexo es igual a



$$f = -\frac{r}{2}$$

La fórmula de Descartes permite expresar la posición  $i$  de la imagen en función de la posición  $o$  del objeto

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = -\frac{2}{r} - \frac{1}{o} = -\frac{2o + r}{ro}$$

$$i = -\frac{ro}{2o + r}$$

La velocidad de la imagen se obtiene derivando la última Ec.

$$v_i = \frac{di}{dt} = -\frac{(2o + r)r - 2ro}{(2o + r)^2} \frac{do}{dt} = -\frac{r^2}{(2o + r)^2} v_o$$

Si el objeto se aproxima al espejo, entonces el valor de  $o$  disminuye y  $v_o < 0$ . Así, se deduce que  $v_i > 0$ , o sea, la imagen avanza hacia la izquierda. Considerando un objeto cuya posición varía de  $+\infty$  a 0, la imagen se mueve en sentido contrario desde  $-r/2$  hasta 0. Además para  $v_o = \text{const}$  la velocidad de la imagen aumenta a medida que el objeto se aproxima al espejo, y tiende a  $|v_o|$  cuando  $o \rightarrow 0$ .

### 2.11 Repita el Prob. 2.10 para un espejo cóncavo.

En este caso la distancia focal vale

$$f = +\frac{r}{2}$$

Los cálculos son idénticos a los anteriores pero con  $-r$  en el lugar  $r$ . Así

$$v_i = -\frac{[-r]^2}{(2o + [-r])^2} v_o = -\frac{r^2}{(2o - r)^2} v_o$$

Para  $v_o < 0$  nuevamente se obtiene  $v_i > 0$ . Si el objeto se mueve de  $+\infty$  a  $f = r/2$ , la imagen real recorre desde  $r/2$  hasta  $\infty$ . Pero al cruzar el foco ( $o = r/2$ ) la imagen se torna virtual y aparece en  $-\infty$ , avanzando hacia el espejo. Por lo tanto, la imagen se mueve siempre en el mismo sentido y su mayor velocidad se produce cuando el objeto está próximo al foco.

**2.12 (A)** *Expresar las posiciones del objeto  $o$  y de la imagen  $i$  en términos de la distancia focal  $f$  y de la amplificación  $m$ . (B) Si se cambia el espejo por otro con distancia focal  $-f$  y se mantiene el objeto en la misma posición, ¿cuánto vale la nueva amplificación?*

**(A)** Los valores de  $f$  y  $m$  se relacionan con  $o$  e  $i$  a través de las siguientes fórmulas

$$\begin{cases} \frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \\ m = -\frac{i}{o} \end{cases}$$

En este ítem se requiere encontrar las *funciones inversas*. De la segunda Ec. se obtiene  $i = -mo$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{o} + \frac{1}{-mo} = \frac{m-1}{mo} \\ o &= \frac{m-1}{m} f \end{aligned}$$

Además

$$i = -mo = -m \frac{m-1}{m} f = (1-m)f \quad (\text{P 2.12.1})$$

**(B)** De forma análoga al ítem **(A)** se puede demostrar para el otro espejo que

$$o' = \frac{m' - 1}{m'} f' = -\frac{m' - 1}{m'} f \quad (\text{P 2.12.2})$$

pues  $f' = -f$ . Según el enunciado del Problema la posición del objeto es la misma  $o' = o$ , de manera que, a partir de las Ecs. (P 2.12.1) y (P 2.12.2), se obtiene que

$$\begin{aligned} -\frac{m' - 1}{m'} f &= \frac{m - 1}{m} f \\ -1 + \frac{1}{m'} &= 1 - \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m'} &= 2 - \frac{1}{m} = \frac{2m - 1}{m} \end{aligned}$$

o sea, la nueva amplificación vale

$$m' = \frac{m}{2m - 1}$$

En el caso especial en que la amplificación no varía ( $m' = m$ ) se obtiene de acuerdo con la última Ec. que

$$m = \frac{m}{2m - 1}$$

y como  $m \neq 0$

$$2m - 1 = 1$$

$$m = 1$$

Esta es la amplificación de un espejo plano.<sup>7</sup> Físicamente al dar vuelta un espejo plano resulta un espejo idéntico, de tal forma que la imagen se mantiene inalterada y su amplificación no cambia.

<sup>7</sup> Observe que si  $m = 1$ , entonces  $i = -mo = -o$  y de acuerdo con la fórmula de Descartes

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{o} + \frac{1}{-o} = 0$$

Por lo tanto  $f = \infty$ , lo que corresponde a un espejo plano.

**2.13** *¿De qué forma se relacionan en un espejo esférico la distancia entre el objeto y el foco  $a = o - f$  con la distancia entre la imagen y el foco  $b = i - f$ ?*

Sustituyendo  $o = a + f$  e  $i = b + f$  en la fórmula de Descartes se encuentra que

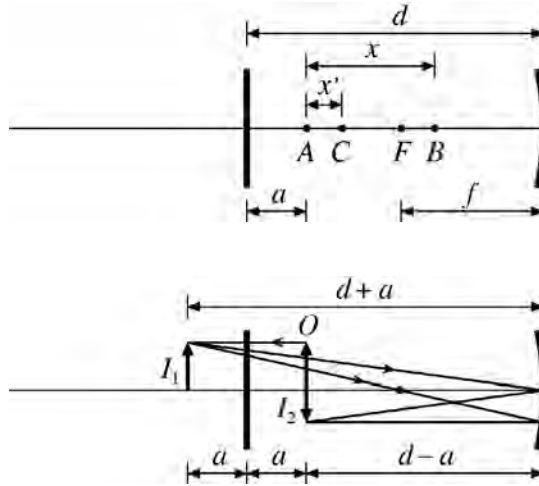
$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{a+f} + \frac{1}{b+f} \\ (a+f)(b+f) &= f [(a+f) + (b+f)] \\ ab + (a+b)f + f^2 &= (a+b)f + 2f^2 \\ ab &= f^2\end{aligned}\tag{P 2.13.1}$$

Esta se denomina Ec. de Newton y es equivalente a la fórmula de Descartes.

Ya que  $f^2 > 0$  se concluye que las distancias  $a$  y  $b$  son ambas positivas o ambas negativas. Por lo tanto, el objeto y la imagen se encuentran siempre al mismo lado del foco (Figs. 2.3 y 2.4).

**2.14** *Un espejo plano está a una distancia  $d$  de un espejo esférico con distancia focal  $f$ . (A) ¿Qué separación  $a$  debe existir entre el espejo plano y un objeto (punto  $A$ ), para que la imagen formada después de una reflexión en cada espejo coincida con la posición del objeto? (B) Si se desplaza el objeto al punto  $B$  localizado a una distancia  $x$  de  $A$ , determine el punto  $C$  donde aparecerá la imagen después de reflejarse una vez en el espejo plano y otra en el esférico. (C) ¿En qué posición estará la imagen si se considera entonces un número infinito de reflexiones? ¿Cuál es la amplificación final?*

(A) Un objeto  $O$  colocado en  $A$  forma la imagen  $I_1$  localizada simétricamente con respecto al espejo plano. Esta imagen representa el objeto para el espejo esférico y su posición relativa es  $o_2 = d + a$ . Ya que la imagen final  $I_2$  coincide con el objeto original, la posición medida a partir del espejo esférico vale  $i_2 = d - a$ .



Usando la fórmula de Descartes se encuentra que

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d+a} + \frac{1}{d-a} = \frac{2d}{d^2 - a^2} \quad (\text{P 2.14.1})$$

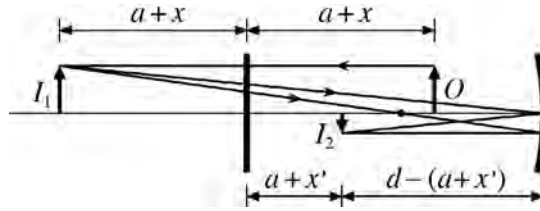
es decir

$$2df = d^2 - a^2 \quad (\text{P 2.14.2})$$

$$a = \sqrt{d^2 - 2df}$$

Como  $a$  puede asumir valores que están comprendidos entre 0 y  $d$ , de la Ec. (P 2.14.2) se desprende que la distancia focal puede variar entre 0 y  $d/2$ . Si esta distancia fuese negativa o mayor que  $d/2$ , entonces no sería posible encontrar un punto tal entre los dos espejos que la imagen  $I_2$  y el objeto  $O$  coincidan.

**(B)** Considere ahora el objeto  $O$  localizado en el punto  $B$ . La imagen  $I_1$  aparece otra vez en una posición simétrica con respecto al espejo plano.



La distancia de  $I_1$  hasta el espejo esférico vale ahora  $o_2 = d + a + x$  y la posición de la segunda imagen (punto C) relativa al espejo esférico es  $i_2 = d - (a + x')$ . Así se obtiene que

$$\frac{1}{d + a + x} + \frac{1}{d - (a + x')} = \frac{1}{f} = \frac{2d}{d^2 - a^2}$$

donde al final se substituyó la Ec. (P 2.14.1). Luego

$$\frac{1}{d - a - x'} = \frac{2d}{d^2 - a^2} - \frac{1}{d + a + x} = \frac{2d(d + a + x) - (d^2 - a^2)}{(d^2 - a^2)(d + a + x)}$$

$$d - a - x' = \frac{(d^2 - a^2)(d + a + x)}{d^2 + 2d(a + x) + a^2}$$

Finalmente, resolviendo para  $x'$  se calcula la separación que existe entre los puntos A y C

$$\begin{aligned} x' &= (d - a) - \frac{(d - a)(d + a)(d + a + x)}{(d + a)^2 + 2dx} \\ &= (d - a) \frac{(d + a)^2 + 2dx - (d + a)[(d + a) + x]}{(d + a)^2 + 2dx} \\ &= (d - a) \frac{dx - ax}{(d + a)^2 + 2dx} \\ &= x g(x) \end{aligned}$$

con

$$g(x) = \frac{(d - a)^2}{(d + a)^2 + 2dx}$$

Recuerde que el valor de  $a$  se determinó en el ítem anterior y depende de la separación  $d$  entre los espejos y de la distancia focal  $f$ .

(C) Ya que el punto  $B$  donde se coloca el objeto se encuentra entre los dos espejos, se deduce que  $-a < x < d - a$ . En este intervalo  $g(x)$  es una función monótonicamente decreciente. Sus valores máximo y mínimo

$$\begin{cases} g_{\max} = g(-a) = \frac{(d-a)^2}{(d+a)^2 - 2da} = \frac{(d-a)^2}{d^2 + a^2} \\ g_{\min} = g(d-a) = \frac{(d-a)^2}{(d+a)^2 + 2d(d-a)} = \frac{(d-a)^2}{3d^2 + a^2} \end{cases}$$

son positivos y menores que 1. Esto significa que

$$|x'| = |x g(x)| = |x| g(x) < |x|$$

o sea, la distancia  $\overline{AC}$  disminuye en comparación con  $\overline{AB}$ . Mientras más reflexiones ocurren, más se aproxima la imagen al punto  $A$ .

La imagen se amplifica cada vez que se refleja en el espejo plano y en el esférico

$$m_n = m_{n,\text{pla}} m_{n,\text{esf}} = 1 \left( -\frac{i_n}{o_n} \right) = -\frac{i_n}{d + (d - i_{n-1})} = -\frac{i_n}{2d - i_{n-1}}$$

En el límite que  $n$  se torna grande

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{i_n}{2d - i_{n-1}} = -\frac{d-a}{2d - (d-a)} = -\frac{d-a}{d+a}$$

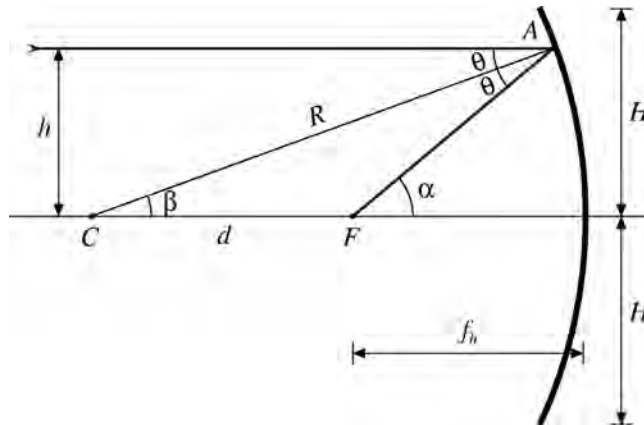
o sea, el módulo de  $m_n$  resulta ser siempre menor que 1. Cada vez que ocurre un par de reflexiones la imagen reduce su tamaño, de tal forma que la amplificación final, cuando se considera un número infinito de reflexiones, vale

$$m = m_1 m_2 \cdots = 0$$



En suma, la luz converge sobre el punto  $A$  y queda confinada entre los espejos *indefinidamente*. De esta manera se obtiene un resonador óptico. Combinado con un *medio activo*<sup>8</sup> se construye un Laser, que es una fuente de luz coherente.

**2.15 Rayos paralelos inciden sobre un espejo cóncavo de radio  $R$ . Determine como varía la distancia focal  $f_h$  si el rayo incidente pasa a una altura  $h$  del eje.**



El rayo que incide es paralelo al eje del espejo, de manera que el ángulo  $\alpha$  en la Figura es igual a  $\theta + \theta = 2\theta$ . Además, los ángulos internos del triángulo  $FAC$  valen  $180^\circ - \alpha$ ,  $\theta$  y  $\beta$ , de tal forma que

$$(180^\circ - \alpha) + \theta + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = \alpha - \theta = 2\theta - \theta = \theta$$

Así se deduce que se trata de un triángulo isoceloso, de manera que los segmentos  $\overline{CF}$  y  $\overline{FA}$  son ambos iguales a  $d$ . Por lo tanto, vale la siguiente relación

<sup>8</sup> Se coloca entre los espejos y tiene por finalidad amplificar la luz. También sirve para reponer las pérdidas que ocurren debido a la absorción de luz en los espejos y a la luz que sale del resonador.

$$R = \overline{CF} \cos \beta + \overline{FA} \cos \theta = 2d \cos \beta \quad (\text{P 2.15.1})$$

Ya que

$$\sin \beta = \frac{h}{R}$$

se obtiene

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R}$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (P 2.15.1) se calcula  $d$

$$R = 2d \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R}$$

$$d = \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - h^2}}$$

De la Figura resulta obvio que  $R = d + f_h$ . Luego la distancia focal cuando el rayo pasa a una distancia  $h$  del eje está dada por

$$f_h = R - d = R - \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - h^2}}$$

La aproximación paraxial se obtiene en el límite que  $h \rightarrow 0$

$$f_0 = R - \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - 0^2}} = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}$$

En el caso que  $h \ll R$  se puede usar la Ec. (A.1, 167) con  $a = -1/2$  y  $x = -h^2/R^2$  para expandir el inverso de la raíz cuadrada

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - h^2}} &= \frac{R^2}{2R \sqrt{\frac{R^2 - h^2}{R^2}}} = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right)^{-1/2} \\ &\approx \frac{R}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2}\right) = \frac{R}{2} + \frac{h^2}{4R} \end{aligned}$$

lo que implica que

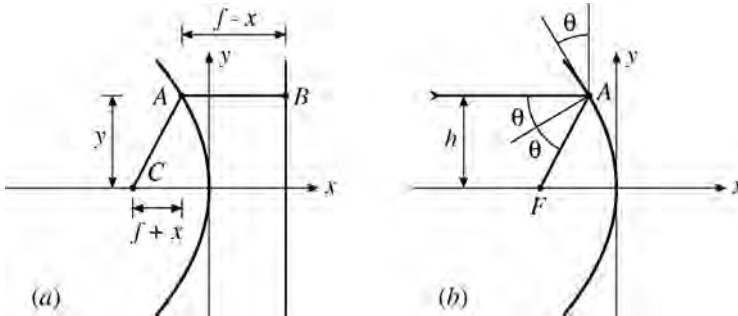
$$f_h \approx R - \left( \frac{R}{2} + \frac{h^2}{4R} \right) = \frac{R}{2} - \frac{h^2}{4R}$$

Como la distancia focal varía, se produce una aberración, esto es, los rayos no convergen sobre un mismo punto. Denotando por  $H$  el máximo de  $h$  (que se obtiene cuando un rayo incide en el borde del espejo), la aberración asume el valor

$$\Delta f = f_0 - f_H = \frac{R}{2} - \left( \frac{R}{2} - \frac{H^2}{4R} \right) = \frac{H^2}{4R}$$

Es por este motivo que se usan espejos esféricos con pequeñas aperturas  $H \ll R$ .

**2.16 (A)** Determine el lugar geométrico del punto  $A$  en la Fig. (a) de modo tal que la distancia  $\overline{AB}$  sea igual a  $\overline{AC}$ , siendo  $B$  un punto sobre la recta  $x = f$  y  $C$  el punto  $(0, -f)$ . **(B)** Si rayos paralelos inciden sobre un espejo que tiene la forma de la curva en el ítem anterior, encuentre el punto focal  $F$  por donde los rayos cruzan el eje  $x$  (Fig. (b)).



**(A)** La distancia entre el punto  $A = (x, y)$  y  $B = (f, y)$  vale

$$\overline{AB} = f - x > 0$$

y la distancia entre  $A$  y  $C = (0, -f)$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x - (-f))^2 + (y - 0)^2}$$

Como  $\overline{AB} = \overline{AC}$

$$f - x = \sqrt{(x + f)^2 + y^2}$$

$$(f - x)^2 = (x + f)^2 + y^2$$

$$f^2 - 2fx + x^2 = f^2 + 2fx + x^2 + y^2$$

$$-4fx = y^2$$

$$x = -\frac{y^2}{4f} \quad (\text{P 2.16.1})$$

lo que representa la Ec. de una parábola.

**(B)** La coordenada del punto  $A$  en la Figura (b) es  $(x_A, h)$ , siendo  $x_A = -h^2/4f$ . Al reflejarse en el espejo el rayo forma un ángulo  $2\theta$  con el eje  $x$ , y la Ec. de la recta inclinada que pasa por el punto  $A$  es

$$\frac{y - h}{x - x_A} = \tan(2\theta)$$

$$\frac{y - h}{\tan(2\theta)} = x - x_A \quad (\text{P 2.16.2})$$

El rayo cruza el eje  $x$  cuando  $y = 0$ , lo que implica que la abcisa del punto  $F$  vale

$$x_F = \frac{0 - h}{\tan(2\theta)} + x_A = -\frac{h}{\tan(2\theta)} - \frac{h^2}{4f} \quad (\text{P 2.16.3})$$

Falta determinar  $\tan(2\theta)$ , lo que se calcula derivando  $x$  (Ec. (P 2.16.1)) con respecto a  $y$  en el punto  $A$

$$\tan\theta = -\left. \frac{dx}{dy} \right|_A = \left. \frac{y}{2f} \right|_{y=h} = \frac{h}{2f}$$

Usando identidades trigonométricas

$$\frac{1}{\tan(2\theta)} = \frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$

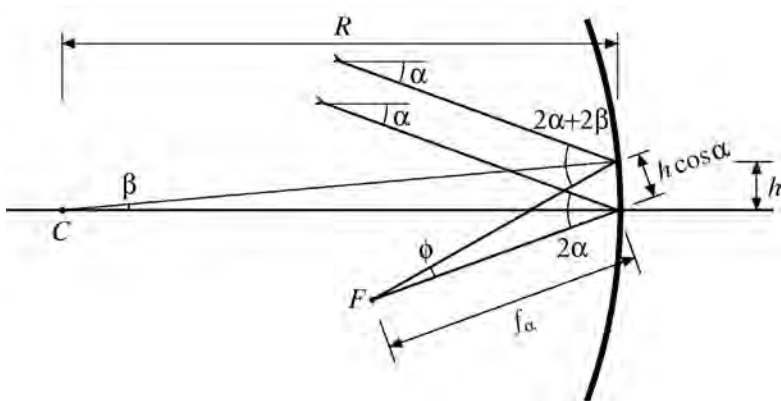
$$= \frac{1}{2 \tan \theta} - \frac{1}{2} \tan \theta = \frac{1}{2 \frac{h}{2f}} - \frac{1}{2} \frac{h}{2f} = \frac{f}{h} - \frac{h}{4f} \quad (\text{P 2.16.4})$$

Reemplazando este valor en la Ec. (P 2.16.3) se obtiene que

$$x_F = -h \left( \frac{f}{h} - \frac{h}{4f} \right) - \frac{h^2}{4f} = -f + \frac{h^2}{4f} - \frac{h^2}{4f} = -f$$

Observe que todos los rayos cruzan sobre el punto  $F$ , es decir, este resultado no depende de la altura  $h$ . Esto significa que en un espejo parabólico no ocurre aberración como en el espejo esférico (Prob. 2.15). Próximos al centro el espejo esférico y el espejo parabólico tienen una forma muy parecida, de modo que considerando pequeñas aperturas los resultados son idénticos para ambos.

**2.17 (A)** Calcule la distancia focal  $f_\alpha$  cuando rayos paralelos inciden formando un ángulo  $\alpha$  con el eje de un espejo cóncavo de radio  $R$ . **(B)** ¿Qué sucede si se usa un espejo parabólico?



**(A)** Los ángulos y las distancias relevantes para resolver el problema se muestran en la Figura. El punto  $C$  indica el centro de curvatura de la superficie esférica de radio  $R$  y  $F$  representa el foco hacia donde convergen los rayos.

Comparando los ángulos antes y después de la reflexión, se deduce que  $2\alpha = (2\alpha + 2\beta) - \phi$ , o sea,  $\phi = 2\beta$ . Asumiendo  $\beta \ll 1$  se obtiene

$$\begin{cases} h = R \sin \beta \approx R\beta \\ h \cos \alpha \approx f_\alpha \tan \phi = f_\alpha \tan(2\beta) \approx 2f_\alpha \beta \end{cases}$$

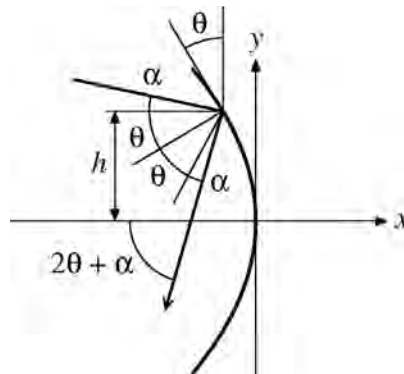
Dividiendo la primera Ec. por la segunda se determina la distancia focal

$$\frac{h}{h \cos \alpha} = \frac{R\beta}{2f_\alpha \beta}$$

$$f_\alpha = \frac{R}{2} \cos \alpha$$

Observe que para una incidencia aproximadamente normal ( $\alpha \ll 1$ ) se tiene  $\cos \alpha \approx 1$  y, por lo tanto,  $f_\alpha \approx R/2$ , o sea, la distancia focal prácticamente no varía. Esto significa que los rayos convergen sobre el *plano focal* que se encuentra a una distancia  $R/2$  del espejo.

**(B)** En este ítem es necesario encontrar la intersección de dos rayos paralelos después que inciden sobre el espejo parabólico.



Si inicialmente el rayo viene descendiendo y forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$ , la trayectoria del rayo reflejado se describe por una fórmula similar a la Ec. (P 2.16.2), pero con  $2\theta \rightarrow 2\theta + \alpha$

$$y = h + (x - x_A) \tan(2\theta + \alpha)$$

Considerando ahora un rayo que incide sobre el vértice del espejo, se obtiene reemplazando  $h = 0$  y  $\theta = 0$  la siguiente Ec. para el rayo reflejado

$$y = x \tan \alpha$$

Las dos rectas se intersectan en  $x = x_F$

$$h + (x_F - x_A) \tan(2\theta + \alpha) = x_F \tan \alpha$$

$$x_F [\tan(2\theta + \alpha) - \tan \alpha] = -h + x_A \tan(2\theta + \alpha) \quad (\text{P 2.17.5})$$

Note que

$$\begin{aligned} \tan(2\theta + \alpha) - \tan \alpha &= \frac{\tan(2\theta) + \tan \alpha}{1 - \tan(2\theta) \tan \alpha} - \tan \alpha \\ &= \frac{\tan(2\theta) + \tan(2\theta) \tan^2 \alpha}{1 - \tan(2\theta) \tan \alpha} \\ &= \frac{\tan(2\theta) \sec^2 \alpha}{1 - \tan(2\theta) \tan \alpha} \end{aligned}$$

de tal forma que (P 2.17.5) se puede escribir en la siguiente forma

$$x_F \frac{\tan(2\theta) \sec^2 \alpha}{1 - \tan(2\theta) \tan \alpha} = -h - \frac{h^2}{4f} \frac{\tan(2\theta) + \tan \alpha}{1 - \tan(2\theta) \tan \alpha}$$

pues  $x_A = -h^2/4f$  (Prob. 2.16 (B)). Simplificando

$$\begin{aligned} x_F &= -\frac{h}{\tan(2\theta) \sec^2 \alpha} \left( 1 - \tan(2\theta) \tan \alpha + \frac{h}{4f} [\tan(2\theta) + \tan \alpha] \right) \\ &= -h \cos^2 \alpha \left( \frac{1}{\tan(2\theta)} - \tan \alpha + \frac{h}{4f} \left[ 1 + \frac{\tan \alpha}{\tan(2\theta)} \right] \right) \end{aligned}$$

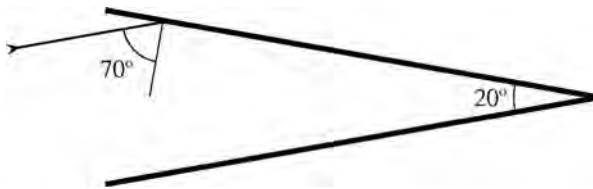
El valor de  $1/\tan(2\theta)$  se determinó en el Prob. 2.16 (Ec. (P 2.16.4)). Ya que la distancia  $f_\alpha$  del vértice al foco es igual a  $|x_F|/\cos \alpha$

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha} &= h \cos \alpha \left\{ \frac{f}{h} - \frac{h}{4f} - \tan \alpha + \frac{h}{4f} \left[ 1 + \left( \frac{f}{h} - \frac{h}{4f} \right) \tan \alpha \right] \right\} \\
 &= h \cos \alpha \left\{ \frac{f}{h} + \left( -1 + \frac{1}{4} - \frac{h^2}{16f^2} \right) \tan \alpha \right\} \\
 &= f \cos \alpha - h \left( \frac{3}{4} + \frac{h^2}{16f^2} \right) \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Luego, cuando la luz no incide paralela al eje de la parábola, la posición del foco depende de  $h$  y ocurre una aberración. Este efecto se torna importante en antenas parabólicas que tienen un diámetro comparable a la distancia focal.<sup>9</sup> En la aproximación paraxial ( $h \ll f$ ) la distancia focal  $f_{\alpha} \approx f \cos \alpha$  varía con el ángulo  $\alpha$  al igual que en el espejo esférico.

## 2.2. Problemas propuestos

**2.18** *Dos espejos unidos forman un ángulo de  $20^{\circ}$  entre ellos. Un rayo de luz incide a un ángulo de  $70^{\circ}$  con la normal de uno de los espejos. Calcule (A) el número total de reflexiones que experimenta el rayo en los espejos y (B) el ángulo entre el rayo que entra y el rayo que sale.*



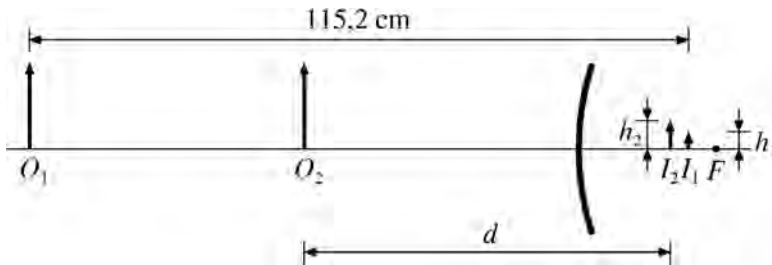
Resp. 8 reflexiones;  $20^{\circ}$

<sup>9</sup> Para pequeños ángulos la posición del foco varía linealmente con  $\alpha$ . Si la antena no apunta en la dirección correcta, la señal detectada es débil.

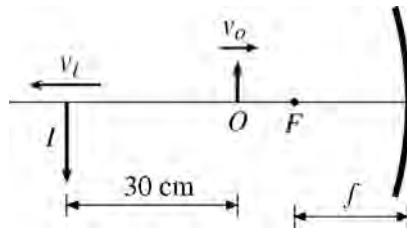


**2.19** Un objeto en  $O_1$  de altura 15 cm produce una imagen  $I_1$  de tamaño  $h_1 = 3$  cm cuando está frente a un espejo convexo. La distancia entre el objeto y la imagen vale entonces 115,2 cm. ¿Cuánto debería valer la distancia  $d$  entre el objeto en  $O_2$  y su imagen  $I_2$ , para que la altura de la imagen sea  $h_2 = 5$  cm?

Resp.  $d = 64$  cm

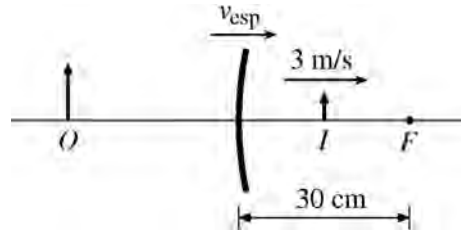


**2.20** Un objeto se mueve con velocidad constante  $v_o = -5$  cm/s hacia un espejo. En un cierto instante la imagen es real y se aleja a  $v_i = 20$  cm/s del espejo. Sabiendo que en ese momento la separación objeto-imagen vale 30 cm, calcule la distancia focal  $f$  del espejo.



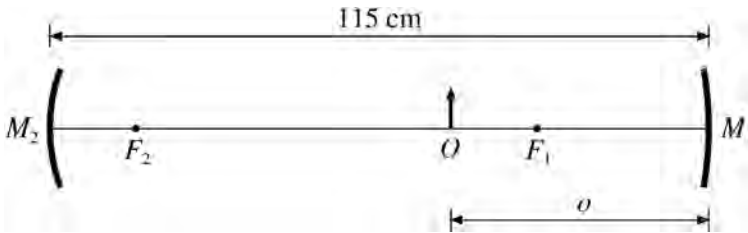
Resp.  $f = 20$  cm

**2.21** Un espejo convexo que tiene una distancia focal igual a  $-30$  cm se aleja con una velocidad  $v_{\text{esp}} = \text{const}$ . En un cierto instante el observador  $O$  ve que su imagen  $I$  tiene una velocidad relativa de 3 m/s. Si la amplificación vale  $1/2$ , calcule (A)  $v_{\text{esp}}$  y (B) la aceleración de la imagen.



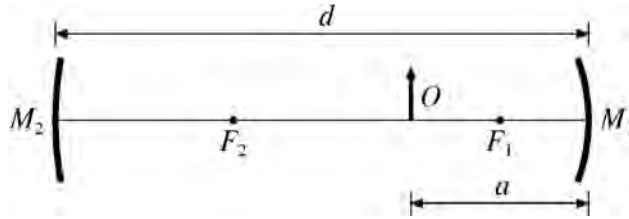
Resp.  $v_{\text{esp}} = 2,4 \text{ m/s}$ ;  $a_i = -4,8 \text{ m/s}^2$

**2.22** Dos espejos esféricos de distancias focales  $f_1 = 30 \text{ cm}$ ,  $f_2 = 15 \text{ cm}$  están separados por una distancia de  $115 \text{ cm}$ . Calcule la posición  $o$  del objeto para que la imagen formada por una reflexión en  $M_1$  y otra reflexión en  $M_2$  sea directa y tres veces mayor que el objeto.



Resp.  $o = 45 \text{ cm}$

**2.23** Dos espejos  $M_1$ ,  $M_2$  con distancias focales iguales a  $f_1, f_2$  están separados por una distancia  $d$ . (A) Determine la distancia  $a$  del objeto  $O$  hasta  $M_1$ , de manera que la imagen formada después de una reflexión en  $M_1$  y otra reflexión en  $M_2$  coincida con el objeto inicial. (B) ¿Qué relación deben satisfacer  $f_1, f_2$  y  $d$  para que  $a$  sea positivo y menor que  $d$ ? (C) Calcule  $a$  en el caso que  $M_1$  se torna un espejo plano, esto es,  $f_1 \rightarrow \infty$ .



Resp. (A) 
$$a_{\pm} = \frac{d(d - 2f_2) \pm \sqrt{d(d - 2f_1)(d - 2f_2)(d - 2f_1 - 2f_2)}}{2(d - f_1 - f_2)}$$

(B) La respuesta  $a_+$  es válida cuando se cumple una de las dos condiciones

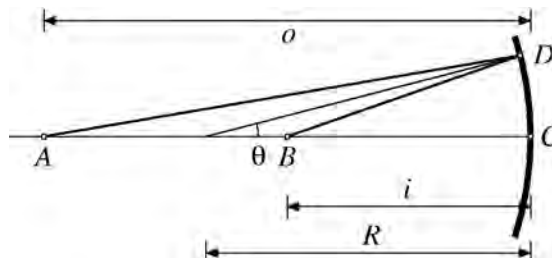
$$\begin{cases} 2f_2 > d & \text{y} & 0 < 2f_1 < d \\ 0 < 2f_2 < d & \text{y} & 2f_1 + 2f_2 < d \end{cases}$$

y  $a_-$  cuando

$$\begin{cases} 2f_1 > d & \text{y} & 0 < 2f_2 < d \\ 0 < 2f_1 < d & \text{y} & 2f_1 + 2f_2 < d \end{cases}$$

(C) Para  $f_1 \rightarrow \infty$  se obtiene  $a_- = \sqrt{d(d - 2f_2)}$ .

**2.24** Considere un espejo cóncavo de radio  $R$  como el ilustrado en la Figura. Los puntos  $A$  (objeto) y  $B$  (imagen) se encuentran a las distancias  $\overline{AC} = o$  y  $\overline{BC} = i$  del vértice  $C$ .



(A) Demuestre que para pequeños ángulos (aproximación paraxial) se obtiene

$$\begin{cases} \overline{AD} = o + \frac{R(R-o)}{2o} \theta^2 \\ \overline{BD} = i + \frac{R(R-i)}{2i} \theta^2 \end{cases}$$

(B) Según el principio de Fermat, los tiempos que demora la luz en ir de A hasta B por las trayectorias ACB y ADB deben ser iguales (véase el Prob. 3.17). Definiendo la distancia focal por  $f = +R/2$ , obtenga la fórmula de Descartes.

## CAPÍTULO 3

### SUPERFICIE ESFÉRICA REFRINGENTE

Cuando un objeto se encuentra en un medio con índice de refracción  $n_1$  y el observador dentro de otro medio con índice de refracción  $n_2$ , entonces la imagen vista es diferente del objeto original (Fig. 3.1). Al igual que en el estudio de espejos, hay que saber calcular dónde se forma la imagen, su tamaño y su orientación.

- **Objeto-Imagen:** si la superficie que delimita los dos medios refringentes es esférica con un radio de curvatura  $r$ , se puede demostrar que las posiciones del objeto  $o$  y de la imagen  $i$  están relacionadas por

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (3.1)$$

Esta fórmula recibe el nombre de Descartes para superficies esféricas refringentes. Es válida para pequeños ángulos de refracción, lo que se cumple si las dimensiones del objeto son pequeñas en comparación con  $r$ . La convención para el signo de  $o$  es la misma que se usa para los espejos esféricos, pero se invierte para los signos de  $r$  e  $i$ . En otras palabras,  $r$  se considera positivo (negativo) para una superficie convexa (cóncava). Cuando  $i > 0$  la imagen es real y se forma al mismo lado que se encuentra el observador. En este caso la luz se aproxima al eje central después que se refracta por la superficie esférica. Pero cuando  $i < 0$  la imagen es virtual y se forma al otro lado. Las prolongaciones de los rayos parecen divergir desde un punto localizado dentro del medio donde está el objeto, y la luz se aleja del eje central después de ser refractada por la superficie.

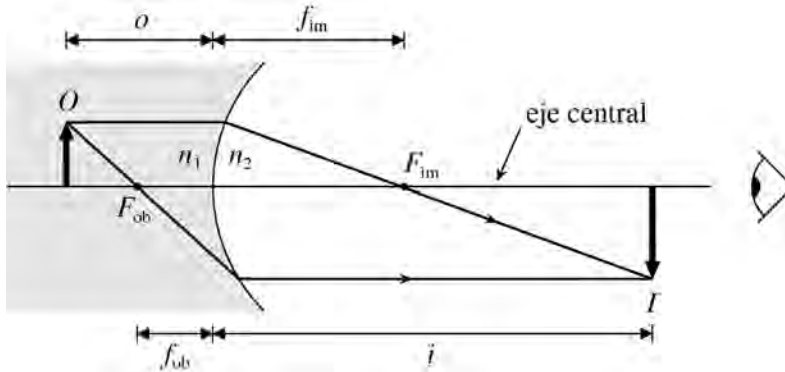


Figura 3.1: Superficie esférica refringente: a un lado el índice de refracción es  $n_1$  y al otro lado  $n_2$ . El observador se encuentra al lado donde se transmite la luz. Se ilustra un caso particular en que la superficie es convexa ( $r > 0$ ) y tanto el objeto como la imagen son reales ( $o > 0$ ,  $i > 0$ ). El punto  $F_{ob}$  se denomina foco objeto (o primer punto focal) y  $F_{im}$  foco imagen (o segundo punto focal). Las distancias focales objeto e imagen son  $f_{ob}$  y  $f_{im}$  respectivamente.

- **Focos:** Si una fuente puntual de luz se encuentra sobre el foco objeto, los rayos se tornan paralelos después que cruzan la superficie esférica refringente. Por otro lado, si los rayos incidentes son paralelos, entonces los rayos convergen sobre el foco imagen.
- **Amplificación:** la amplificación a través de una superficie esférica refringente se calcula con la fórmula

$$m = -\frac{n_1 i}{n_2 o} \quad (3.2)$$

En el caso especial de una superficie de refracción plana ( $r \rightarrow \infty$ ) el lado derecho de la Ec. (3.1) vale cero. Simplificando se obtiene que

$$i = -\frac{n_2}{n_1} o \quad (3.3)$$

y, por lo tanto, la imagen formada se encuentra en el mismo lado que el objeto (Fig. 3.2). Además  $m = 1$ , o sea, la imagen tiene un tamaño y una orientación igual al objeto, pero aparece en una posición diferente.

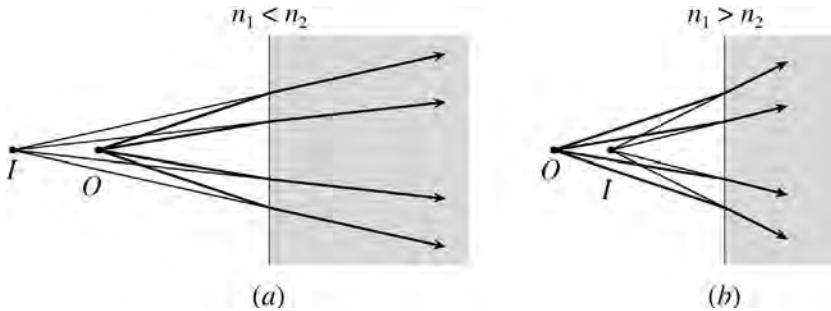
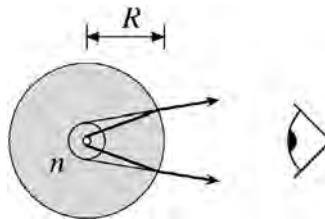


Figura 3.2: Superficie refringente plana. (a) El índice de refracción  $n_1$  del medio donde se encuentra el objeto  $O$  es menor que el índice  $n_2$  donde se refracta la luz. La imagen virtual  $I$  aparece más lejos de la superficie que el objeto. (b) En este caso  $n_1 > n_2$  y la imagen se ve más cerca de la superficie.

### 3.1. Problemas resueltos

**3.1** Se coloca un pequeño objeto en el centro de una esfera de radio  $R = 10$  cm e índice de refracción  $n = 1,5$ . ¿Cómo se ve la imagen?



La superficie esférica (vista desde la posición donde se encuentra el objeto) es cóncava y por convención se debe tomar el signo negativo para el radio  $r = -10$  cm. Ya que el objeto se encuentra en el centro, la distancia hasta la superficie vale  $o = 10$  cm. Usando  $n_1 = n = 1,5$  y  $n_2 = 1$  se puede proceder a calcular la posición de la imagen

$$\frac{1,5}{10} + \frac{1}{i} = \frac{1 - 1,5}{-10} = -\frac{1}{10} + \frac{1,5}{10}$$

$$\frac{1}{i} = -\frac{1}{10}$$

$$i = -10 \text{ cm}$$

Luego la amplificación vale

$$m = -\frac{n_1 i}{n_2 o} = \frac{1,5 \times 10}{1 \times 10} = 1,5$$

La imagen se forma sobre el objeto, es directa y su tamaño 50% mayor que el objeto.

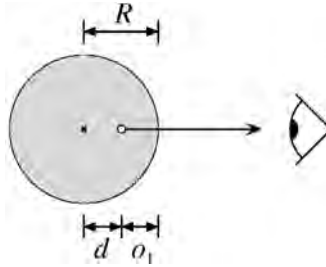
**3.2 Una esfera de vidrio de diámetro 1 pulgada ( $2R = 2,54$  cm) e índice de refracción  $n = 1,508$  contiene una pequeña burbuja ubicada a una distancia  $d = 0,64$  cm del centro. Halle la posición y el aumento de la imagen vista por una persona que mira por un lado o por otro según la línea que une el centro de la esfera con la burbuja.**

Los rayos se emiten desde la burbuja y ésta equivale al objeto. Al igual que en el Prob. 3.1, la superficie es cóncava y el valor para el radio es con el signo negativo  $r = -R = -2,54/2 = -1,27$  cm. Según la fórmula de Descartes para la superficie esférica refringente con  $n_1 = 1,508$  y  $n_2 = 1$ , las posiciones del objeto y de la imagen se relacionan por

$$\frac{1,508}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1 - 1,508}{-1,27} = 0,400$$

Considerando primero el caso en que se mira la burbuja por el lado más próximo a la superficie, la distancia del objeto a la superficie vale  $o_1 = R - d = 1,27 - 0,64 = 0,63$  cm.





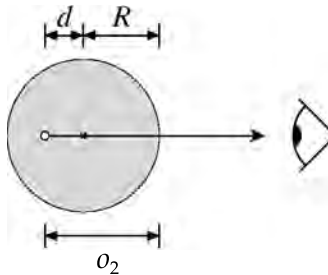
Sustituyendo  $o = o_1$  en la última Ec. y resolviendo para  $i = i_1$

$$\frac{1}{i_1} = 0,400 - \frac{1,508}{0,63} = -1,994$$

$$i_1 = \frac{1}{-1,994} = -0,502 \text{ cm} \approx -5,0 \text{ mm}$$

La amplificación es entonces igual a

$$m_1 = -\frac{n_1 i_1}{n_2 o_1} = \frac{1,508 \times 0,502}{1 \times 0,63} = 1,20$$



En la segunda situación la separación entre la burbuja y la superficie vale  $o_2 = R + d = 1,27 + 0,64 = 1,91 \text{ cm}$ . Análogamente se obtienen la posición

$$\frac{1}{i_2} = 0,400 - \frac{1,508}{1,91} = -0,3895$$

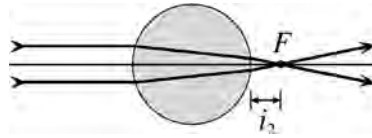
$$i_2 = \frac{1}{-0,3895} = -2,57 \text{ cm} = -25,7 \text{ mm}$$

y la amplificación

$$m_2 = -\frac{n_1 i_2}{n_2 o_2} = \frac{1,508 \times 2,57}{1 \times 1,91} = 2,03$$

En el primer caso, la imagen aparece más próxima a la superficie ( $|i_1| < o_1$ ) y su tamaño es mayor que el objeto. En el segundo caso la imagen se ve más lejos ( $|i_2| > o_2$ ) y su tamaño aumenta más aún.

**3.3 Un haz de luz incide sobre una esfera de vidrio de radio  $R$ . Si el índice de refracción está en el rango  $1 < n < 2$ , determine la separación entre el foco  $F$  y el borde de la esfera.**



En este problema se requiere calcular la distancia  $i_2$  donde los rayos paralelos se interceptan. Los rayos incidentes equivalen a un objeto en el infinito  $o_1 = \infty$ . Ya que la primera superficie es convexa  $r_1 = +R$ , usando la fórmula de Descartes se encuentra que

$$\frac{1}{\infty} + \frac{n}{i_1} = \frac{n-1}{R}$$

$$i_1 = \frac{nR}{n-1}$$

La primera imagen equivale al segundo objeto y su posición es igual a

$$o_2 = 2R - i_1 = 2R - \frac{nR}{n-1} = \frac{n-2}{n-1} R < 0$$

La desigualdad se obtiene porque  $n-2 < 0$  y  $n-1 > 0$ . El signo negativo indica que se trata de un objeto virtual.

La segunda superficie refringente es cóncava  $r_2 = -R$  y la posición de la imagen final se calcula otra vez con la fórmula de Descartes

$$\frac{n}{o_2} + \frac{1}{i_2} = \frac{1-n}{-R}$$

es decir,

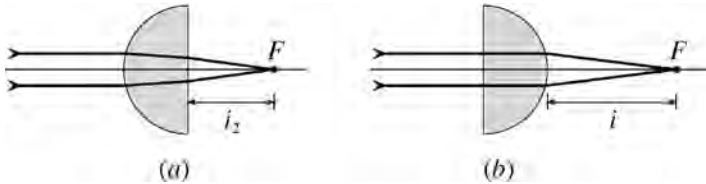
$$\begin{aligned}\frac{1}{i_2} &= \frac{n-1}{R} - \frac{n}{o_2} = \frac{n-1}{R} - n \frac{n-1}{(n-2)R} \\ &= \frac{n-1}{(n-2)R} [(n-2) - n] = -\frac{(n-1)2}{(n-2)R}\end{aligned}$$

Los rayos convergen en

$$i_2 = \frac{2-n}{n-1} \frac{R}{2}$$

Note que  $i_2 > 0$  pues  $2 - n > 0$  y  $n - 1 > 0$ . Esto significa que la imagen es real y los rayos convergen sobre un punto a la derecha de la segunda superficie, tal como se halla ilustrado en la Figura al comienzo. Si  $n$  fuese mayor que 2, entonces se obtendría  $i_2 < 0$  y los rayos parecerían divergir desde un punto localizado a la izquierda de la superficie.

**3.4 Una lente gruesa está formada por una semiesfera de vidrio de radio 6 cm. Sabiendo que el índice de refracción es igual a 1,5, calcule la posición del foco  $F$  cuando la luz incide (A) por el lado esférico (Fig. (a)) y (B) por el lado plano (Fig. (b)).**



**(A)** Los rayos paralelos equivalen a un objeto en el infinito  $o_1 = \infty$ . Ya que la primera superficie es convexa, se deduce que  $r_1 = +6$  cm. Sustituyendo  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1,5$  en la fórmula de Descartes, se encuentra que la primera imagen se forma en

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1,5}{i_1} = \frac{1,5 - 1}{6} = \frac{0,5}{6} = \frac{1}{12}$$

$$i_1 = 1,5 \times 12 = 18 \text{ cm}$$

Esta imagen actúa como objeto para la superficie refringente plana y su posición relativa vale  $o_2 = 6 - 18 = -12$  cm. Reemplazando  $n_1 = 1,5$  y  $n_2 = 1$  en la Ec. (3.3, 86), se obtiene que la imagen final (= foco) aparece en

$$i_2 = -\frac{1}{1,5} (-12) = 8 \text{ cm}$$

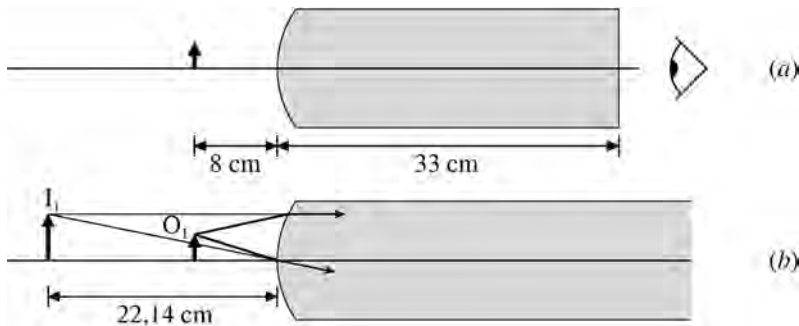
(B) En este caso, la primera superficie es plana y los rayos son paralelos a la normal, de modo que no ocurre refracción. O sea, los rayos se mantienen paralelos y el objeto para la segunda superficie se encuentra en el infinito. Como esta superficie es cóncava  $r = -6$  cm, de acuerdo con la fórmula de Descartes se obtiene que

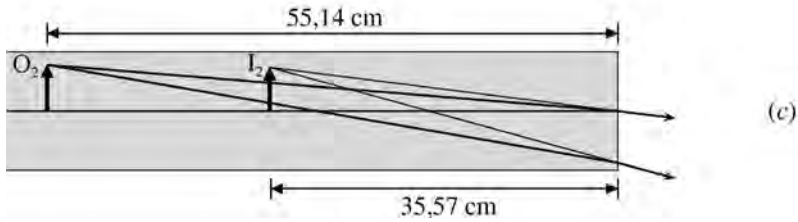
$$\frac{1,5}{\infty} + \frac{1}{i} = \frac{1 - 1,5}{-6} = \frac{-0,5}{-6} = \frac{1}{12}$$

$$i = 12 \text{ cm}$$

Así, se concluye que la posición del foco depende de la dirección considerada. Pero esto no sucede cuando una lente es delgada (Capítulo 4).

**3.5 Una varilla de vidrio ( $n = 1,55$ ) de largo 33 cm tiene un extremo plano y el otro esférico con un radio de 10 cm. Si se coloca un objeto a 8 cm del extremo semiesférico (Fig. (a)), calcule la posición de la imagen final y su aumento.**





Este problema se resuelve en dos etapas. En la primera se considera como si la varilla fuese semi-infinita hacia la derecha y se calcula la posición de la imagen  $I_1$  formada *dentro* de la varilla (Fig. (b)). Después se toma esta imagen como si fuera el objeto  $O_2$  *dentro* de la varilla y se calcula la posición de la imagen final  $I_2$  (Fig. (c)).

Inicialmente se tiene una superficie convexa ( $r > 0$ ) y de acuerdo con la fórmula de Descartes

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} + \frac{1,55}{i_1} &= \frac{1,55 - 1}{10} = 0,055 \\ \frac{1,55}{i_1} &= 0,055 - 0,125 = -0,070 \\ i_1 &= \frac{1,55}{-0,070} = -22,14 \text{ cm}\end{aligned}$$

Esta es una imagen virtual que se forma 22,14 cm a la izquierda de la superficie esférica (Fig. (b)). La imagen  $I_1$  corresponde al objeto  $O_2$  que se usa para la segunda superficie refringente. La posición relativa es  $o_2 = 33 - i_1 = 33 - (-22,14) = 55,14$  cm (Fig. (c)). Como se trata de una superficie plana, se puede usar directamente la Ec. (3.3, 86) para calcular la posición de la imagen

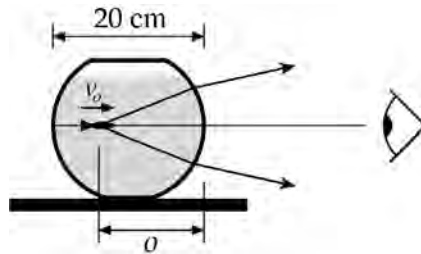
$$i_2 = -\frac{1}{1,55} 55,14 = -35,57 \text{ cm}$$

O sea, la imagen aparece como si estuviera a  $35,57 - 33 = 2,57$  cm del borde esférico de la varilla.

Por último, el aumento total se calcula multiplicando las ampliaciones de cada etapa

$$m = m_1 m_2 = \left( -\frac{1}{n_{o_1}} \right) \left( -\frac{n_{i_2}}{1} \right) = \frac{22,14}{8} \frac{35,57}{55,14} = 1,79$$

**3.6** Un pez pequeño se encuentra en un acuario esférico de diámetro 20 cm y nada con velocidad constante  $v_o = 3,6$  cm/s a lo largo de una línea que pasa por el centro del acuario. Sabiendo que el índice de refracción del agua vale 1,33, determine (A) la posición, (B) la velocidad y (C) la aceleración vista por una persona que mira el acuario cuando el pez se encuentra a 15 cm, 10 cm y 5 cm del borde.



(A) Como la luz se propaga desde el acuario hacia el exterior, la superficie esférica es cóncava y el radio  $r$  es igual a  $-20/2 = -10$  cm. Luego, según la fórmula de Descartes

$$\frac{1,33}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1 - 1,33}{-10}$$

$$\frac{1}{i} = 0,033 - \frac{1,33}{o} \quad (\text{P 3.6.1})$$

$$i = \frac{1}{0,033 - \frac{1,33}{o}} \quad (\text{P 3.6.2})$$

(B) Esta parte es análoga a los Probs. 2.10. y 2.11. La velocidad del objeto vale<sup>1</sup>  $v_o = do/dt = -3,6$  cm/s y la velocidad de la imagen  $v_i = di/dt$ . Derivando la Ec. (P. 3.6.1) con respecto al tiempo  $t$  se obtiene

<sup>1</sup> Se tomó el signo negativo porque el pez se aproxima a la superficie, o sea, el valor de  $o$  disminuye.

$$-\frac{1}{i^2} \frac{di}{dt} = \frac{1,33}{o^2} \frac{do}{dt}$$

$$v_i = -1,33 v_o \left(\frac{i}{o}\right)^2 \quad (\text{P 3.6.3})$$

(C) La aceleración se calcula derivando la velocidad  $v_i$ , y como  $v_o = \text{const}$

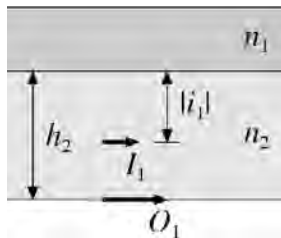
$$\frac{dv_i}{dt} = -1,33 v_o 2 \frac{i}{o} \frac{d}{dt} \left(\frac{i}{o}\right) = -2,66 v_o \frac{i}{o} \frac{o \frac{di}{dt} - i \frac{do}{dt}}{o^2}$$

$$a_i = -2,66 v_o \frac{i}{o^3} (ov_i - iv_o) \quad (\text{P 3.6.4})$$

Insertando los datos para  $o$  y  $v_o$  en las Ecs. (P 3.6.2), (P 3.6.3) y (P 3.6.4) se encuentran finalmente los valores que están resumidos en la tabla a continuación. Observe que mientras más alejado se encuentra del borde, mayor la aceleración aparente.

$o$ [cm]	$i$ [cm]	$v_i$ [cm/s]	$a_i$ [cm/s <sup>2</sup> ]
15	-17,96	6,87	-1,95
10	-10,00	4,79	-1,14
5	-4,29	3,53	-0,72

**3.7 Resuelva el Prob. 1.23 usando la fórmula de Descartes para superficies refringentes.**



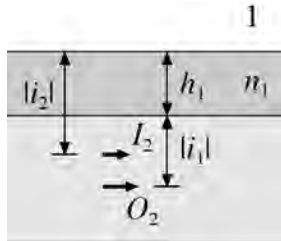
La posición del primer objeto (que corresponde al fondo del recipiente) está a una distancia  $o_1 = h_2$  de la interfaz que separa los medios con índices

de refracción  $n_1$  y  $n_2$ . Ya que la superficie es plana se puede usar directamente la Ec. (3.3, 86), pero observando que aquí  $n_1 \rightarrow n_2$  y  $n_2 \rightarrow n_1$

$$i_1 = -\frac{n_1}{n_2} h_2$$

La posición del segundo objeto (= primera imagen) con respecto a la interfaz superior vale

$$\begin{aligned} o_2 &= h_1 + |i_1| \\ &= h_1 + \frac{n_1}{n_2} h_2 \\ &= \frac{n_2 h_1 + n_1 h_2}{n_2} \end{aligned}$$



Usando otra vez la Ec. (3.3, 86), pero con  $n_2 \rightarrow 1$

$$i_2 = -\frac{1}{n_1} o_2 = -\frac{n_2 h_1 + n_1 h_2}{n_1 n_2}$$

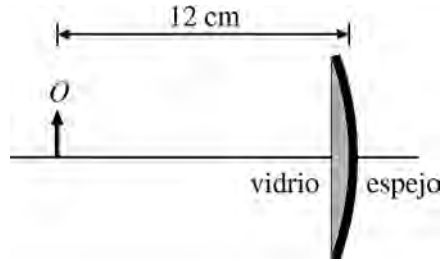
Luego el fondo aparece a una distancia

$$h = |i_2| = \frac{h_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2}$$

abajo de la superficie. Este resultado coincide con la Ec. (P 1.23.2, 39).

**3.8 Un espejo cóncavo de radio 12 cm está recubierto con un vidrio delgado, el cual tiene un índice de refracción igual a 1,5. Si se coloca un objeto a 12 cm, encuentre la imagen que se forma.**





El problema se divide en tres partes: primero, la transmisión a través de la superficie plana refringente; después, la reflexión en el espejo; y finalmente, otra transmisión a través de la superficie refringente.

En la primera parte se tiene una superficie plana y según la Ec. (3.3, 86)

$$i_1 = -\frac{1}{1,5} 12 = -18 \text{ cm}$$

La posición del segundo objeto (= primera imagen) con respecto al espejo es  $o_2 \approx 0 - i_1 = 18 \text{ cm}$ , pues el vidrio es delgado. Ya que se trata de un espejo cóncavo, su distancia focal es positiva  $f_{\text{esp}} = +r/2 = 6 \text{ cm}$ . Luego

$$\frac{1}{i_2} = \frac{1}{f_{\text{esp}}} - \frac{1}{o_2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{3-1}{18}$$

$$i_2 = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}$$

En la última etapa la luz se propaga hacia la izquierda y el tercer objeto (= segunda imagen) se forma 9 cm pasado la superficie plana,<sup>2</sup> o sea,  $o_3 = -9 \text{ cm}$ . Aplicando nuevamente la Ec. (3.3, 86)

$$i_3 = -\frac{1}{1,5} (-9) = 6 \text{ cm}$$

La imagen final es real y se forma 6 cm pasado la superficie refringente, o sea, a la izquierda.

Finalmente la amplificación total vale

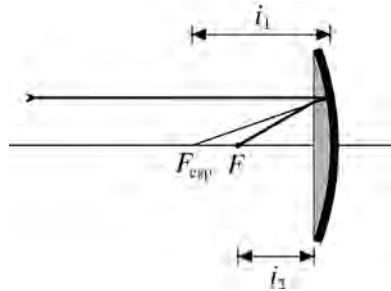
<sup>2</sup> Esto significa que el objeto es virtual.

$$m = m_1 m_2 m_3 = \left( -\frac{1}{n} \frac{i_1}{o_1} \right) \left( -\frac{i_2}{o_2} \right) \left( -\frac{n}{1} \frac{i_3}{o_3} \right) = \frac{18}{12} \left( -\frac{9}{18} \right) \frac{6}{9} = -0,5$$

La imagen se encuentra invertida y su tamaño se reduce un 50% en comparación con el objeto.

Se sugiere al estudiante que haga un trazado de rayos para ver dónde y cómo se forman las tres imágenes.

**3.9 (A) Halle la distancia focal equivalente  $f$  del espejo recubierto en el Prob. 3.8. (B) Usando  $f$ , calcule en qué posición se forma la imagen si se coloca un objeto a 12 cm del espejo recubierto. (C) ¿A qué distancia debería estar el objeto para que la imagen aparezca en el mismo lugar que el objeto?**



(A) El foco  $F$  representa el punto hacia donde convergen rayos paralelos que inciden sobre el sistema óptico. Con la finalidad de hallar la distancia focal, hay que determinar la posición de la imagen formada por un objeto que se encuentra en el infinito. Como los rayos inciden normalmente sobre el vidrio, estos no se refractan (desvían) en la superficie plana y, para efectos prácticos, es como si en esta parte no existiera el vidrio. A continuación, la luz se refleja en el espejo cóncavo y forma una imagen sobre el foco  $F_{\text{esp}}$ . Como su distancia focal vale  $f_{\text{esp}} = 6$  cm, la posición de la imagen es  $i_1 = 6$  cm (a la izquierda). Los rayos se propagan ahora en sentido contrario y dejan de ser paralelos. Al ser refractados a través de la superficie plana forman la imagen final en

$$i_2 = -\frac{n_2}{n_1} o_2 = -\frac{1}{1,5} (-6) = 4 \text{ cm}$$

donde se usó  $o_2 \approx 0 - i_1 = -6 \text{ cm}$  para la posición del segundo objeto. Así, se concluye que la distancia focal equivalente es  $f = 4 \text{ cm}$ . Finalmente, observe que el foco  $F$  se encuentra más cerca al espejo que  $F_{\text{esp}}$  (sin el vidrio).

**(B)** Con  $f = 4 \text{ cm}$  para la distancia focal del espejo recubierto y  $o = 12 \text{ cm}$  para la posición del objeto resulta

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$i = \frac{12}{3-1} = 6 \text{ cm}$$

$$m = -\frac{i}{o} = -\frac{6}{12} = -0,5 \text{ cm}$$

Estos valores son los mismos que se calcularon anteriormente para la posición de la imagen y la amplificación lateral.

**(C)** Si se desea que las posiciones de la imagen y del objeto coincidan, entonces se debe sustituir  $i = o$  en la Ec. del espejo

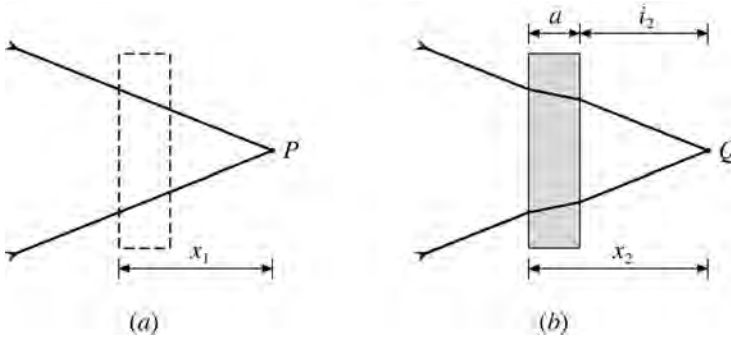
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{o} = \frac{2}{o}$$

Por lo tanto, el objeto debe estar en la siguiente posición

$$o = 2f = 8 \text{ cm}$$

Note que la imagen aparece invertida y tiene el mismo tamaño pues  $m = -i/o = -1$ .

**3.10** *Rayos de luz convergen sobre el punto P (Fig. (a)). Calcule cuánto se desplaza el nuevo punto de convergencia (Q en la Fig. (b)) al colocar antes de P un vidrio plano de espesor a e índice de refracción n.*



El punto  $P$  corresponde a la posición del objeto (virtual) que se transmite a través de la primera superficie refringente después que se inserta el vidrio. Luego  $o_1 = -x_1$  y como la superficie es plana

$$i_1 = -\frac{n}{1} o_1 = -n (-x_1) = nx_1$$

Esta imagen equivale al objeto para la segunda superficie refringente plana y su posición relativa vale

$$o_2 = a - i_1 = a - nx_1$$

Así se encuentra que

$$i_2 = -\frac{1}{n} o_2 = -\frac{a - nx_1}{n} = -\frac{a}{n} + x_1$$

La posición final (punto  $Q$ ), medida a partir de la primera superficie, está corrida una distancia  $a$  con respecto a la posición  $i_2$  medida a partir de la segunda superficie

$$x_2 = a + i_2 = a - \frac{a}{n} + x_1$$

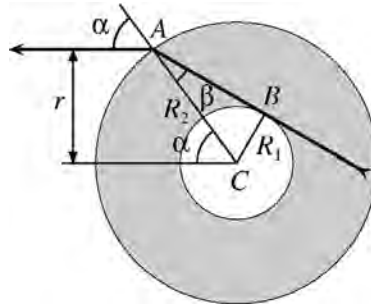
Por lo tanto, el desplazamiento del punto  $P$  es igual a

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)a$$

El desplazamiento se torna mayor cuando  $n$  crece y el límite máximo vale  $a$ . En particular, para  $n = 1$  se tiene  $\Delta x = 0$ , pues, si el índice de refracción

no varía, es como si la placa no existiera y, consecuentemente, el punto no se desplaza.

**3.11** Un tubo de vidrio hueco (índice de refracción  $n$ ) tiene un radio interno  $R_1$  y un radio externo  $R_2$ . Demuestre que el radio interno aparente  $r$  no depende de  $R_2$ .



El radio aparente se obtiene cuando la trayectoria del rayo que pasa por dentro del tubo es tangente al círculo interno (punto  $B$ ). Luego  $ABC$  representa un triángulo rectángulo y vale la relación

$$R_1 = R_2 \sin \beta \quad (\text{P 3.11.1})$$

Por otro lado, el radio aparente se puede calcular a partir de  $R_2$  y del ángulo  $\alpha$

$$r = R_2 \sin \alpha$$

Pero, según la ley de Snell,  $\sin \alpha = n \sin \beta$ , de tal forma que

$$r = R_2 n \sin \beta$$

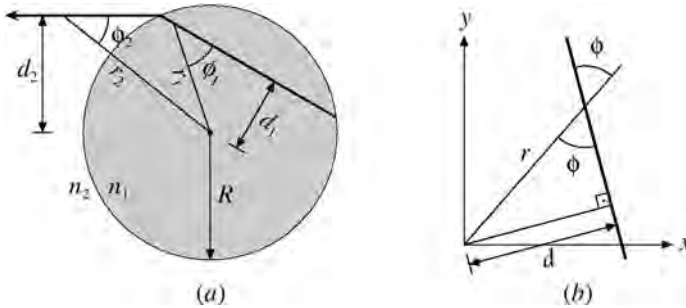
Usando (P 3.11.1) la última Ec. se puede escribir de la siguiente manera

$$r = nR_1 \quad (\text{P 3.11.2})$$

Así, se concluye que radio interno aparente  $r$  es función de  $R_1$ , pero no de  $R_2$ .

**3.12** Una esfera de radio  $R$  e índice de refracción  $n_1$  está rodeada por un medio con índice  $n_2$ . La trayectoria de un rayo de luz que se refracta en la superficie esférica se escribe usando las coordenadas  $r_1, \phi_1$  dentro de la esfera y  $r_2, \phi_2$  fuera de la esfera (Fig. (a)). Demuestre que se satisface la siguiente Ec.

$$n_1 r_1 \sin \phi_1 = n_2 r_2 \sin \phi_2 \quad (\text{P 3.12.1})$$



Considere primero la Ec. de la recta que pasa a una distancia  $d$  del origen (Fig. (b)). En el triángulo rectángulo vale la relación  $\sin \phi = d/r$ , o sea,

$$r \sin \phi = d = \text{const}$$

Por lo tanto, si  $d_1$  y  $d_2$  representan las distancias de las dos rectas hasta el origen en la Fig. (a)

$$\begin{cases} r_1 \sin \phi_1 = d_1 \\ r_2 \sin \phi_2 = d_2 \end{cases} \quad (\text{P 3.12.2})$$

Las distancias  $r_1$  y  $r_2$  varían con los ángulos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  respectivamente. En particular, para un punto sobre la superficie refringente

$$\begin{cases} R \sin \phi_{1R} = d_1 \\ R \sin \phi_{2R} = d_2 \end{cases} \quad (\text{P 3.12.3})$$

siendo  $\phi_{1R}$  y  $\phi_{2R}$  los ángulos cuando  $r_1 = r_2 = R$ .

De acuerdo con la ley de Snell

$$n_1 \sin \phi_{1R} = n_2 \sin \phi_{2R}$$

y multiplicando por  $R$

$$\begin{aligned} n_1 R \sin \phi_{1R} &= n_2 R \sin \phi_{2R} \\ n_1 d_1 &= n_2 d_2 \end{aligned} \quad (\text{P 3.12.4})$$

donde al final se usó la Ec. (P 3.12.3). Observe que se reproduce la Ec. (P 3.11.2) del problema anterior si se reemplazan  $n_1 = n$ ,  $d_1 = R_1$ ,  $n_2 = 1$  y  $d_2 = r$ .

Usando las Ecs. (P 3.12.2) y (P 3.12.4) se concluye que

$$\begin{aligned} n_1 r_1 \sin \phi_1 &= n_1 d_1 \\ &= n_2 d_2 \\ &= n_2 r_2 \sin \phi_2 \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

**3.13** *El índice de refracción  $n$  en un medio depende sólo del radio  $r$ . Obtenga la Ec. de la trayectoria de un rayo de luz en coordenadas polares planas.*

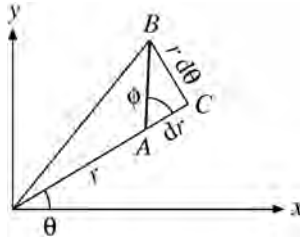
Considere primero el caso simplificado donde el índice de refracción  $n_i$  es constante en el intervalo  $(R_i, R_{i+1})$ , siendo  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Si se usan las coordenadas  $r_i, \phi_i$  en el  $i$ -ésimo intervalo, entonces aplicando sucesivamente la Ec. (P 3.12.1)

$$n_1 r_1 \sin \phi_1 = n_2 r_2 \sin \phi_2 = n_3 r_3 \sin \phi_3 = \dots$$

En general se deduce que

$$nr \sin \phi = c \quad (\text{P 3.13.1})$$

donde  $c$  representa una constante. Esta Ec. es la análoga de la (P 1.15.2, 24), en la que  $n$  depende sólo de la altura  $y$ .



La Figura ilustra cómo se relacionan las distancias infinitesimales  $dr$ ,  $r d\theta$  y el ángulo  $\phi$  entre el radio  $r$  y la trayectoria  $AB$ . Ya que el triángulo  $ABC$  es rectángulo

$$\sin \phi = \frac{r d\theta}{\sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2}} = \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}}$$

Despejando  $\sin \phi$  en (P 3.13.1) y sustituyendo el resultado en la última Ec.

$$\frac{c}{nr} = \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}}$$

Resolviendo para  $dr/d\theta$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = \frac{n^2 r^4}{c^2}$$

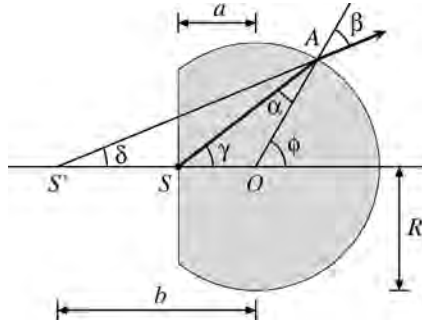
$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{r}{c} \sqrt{n^2 r^2 - c^2}$$

El signo positivo se usa cuando la distancia  $r$  crece con el ángulo  $\theta$  y el negativo cuando disminuye. Finalmente, la trayectoria se obtiene calculando la integral

$$\theta - \theta_0 = \pm c \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - c^2}}$$



**3.14** Una esfera de vidrio de radio  $R$  e índice de refracción  $n$  tiene un corte plano que pasa a una distancia  $a = R/n$  del centro  $O$ . Desde una fuente puntual  $S$  salen rayos de luz, los cuales emergen de la esfera y parecen divergir de  $S'$ . Demuestre que la distancia aparente  $b$  de  $S'$  hasta el centro no depende del ángulo de observación  $\delta$ .



La geometría del problema está ilustrada en la Figura. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a  $180^\circ$ , de manera que para  $AOS$  y  $AOS'$  valen las relaciones

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + (180^\circ - \phi) = 180^\circ \\ \beta + \delta + (180^\circ - \phi) = 180^\circ \end{cases}$$

o sea,

$$\alpha + \gamma = \phi = \beta + \delta \quad (\text{P 3.14.1})$$

Aplicando la ley de los senos al triángulo  $AOS$

$$\frac{\sin \gamma}{R} = \frac{\sin \alpha}{a}$$

Según el enunciado  $R/a = n$  de manera que

$$\sin \gamma = \frac{R}{a} \sin \alpha = n \sin \alpha = \sin \beta$$

donde la última igualdad vale porque el rayo refractado en el punto  $A$  satisface la ley de Snell:  $n \sin \alpha = 1 \sin \beta$ . De esta forma se deduce que  $\gamma = \beta$ , lo que junto con la Ec. (P 3.14.1) implica  $\alpha = \delta$ .

Aplicando ahora la ley de los senos al triángulo  $AOS'$  y sustituyendo  $\sin \delta = \sin \alpha$  se calcula la distancia  $b$

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \delta}{R} = \frac{\sin \alpha}{R}$$

$$b = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} R = nR$$

donde al final se usó nuevamente la ley de Snell para reemplazar la razón entre los senos por  $n$ . Luego  $b$  es una constante y no depende de los ángulos mostrados en la Figura.

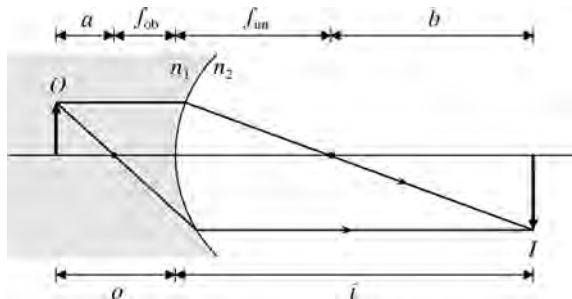
**3.15 Una superficie esférica de radio  $r$  delimita dos medios con índices de refracción  $n_1, n_2$ . La distancia focal objeto<sup>3</sup> se define por**

$$f_{\text{ob}} = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r$$

y la distancia focal imagen<sup>4</sup>

$$f_{\text{im}} = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r$$

¿De que forma se relaciona la distancia  $a = o - f_{\text{ob}}$  entre el objeto y el foco objeto con la distancia  $b = i - f_{\text{im}}$  entre la imagen y el foco imagen?



<sup>3</sup> Corresponde a la posición donde se debe colocar un objeto para que los rayos transmitidos a través de la superficie se tornen paralelos ( $i = \infty$ ).

<sup>4</sup> Indica el punto de convergencia de rayos que inicialmente son paralelos ( $o = \infty$ ).

Sustituyendo  $o = a + f_{ob}$ ,  $i = b + f_{im}$  y

$$\frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{n_1}{f_{ob}}$$

en la Ec. (3.1, 85) para la superficie esférica refringente se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{f_{ob}} &= \frac{n_1}{a + f_{ob}} + \frac{n_2}{b + f_{im}} \\ (a + f_{ob})(b + f_{im}) &= \frac{f_{ob}}{n_1} [n_1(b + f_{im}) + n_2(a + f_{ob})] \\ &= f_{ob}(b + f_{im}) + \frac{n_2}{n_1} f_{ob}(a + f_{ob}) \end{aligned}$$

Como  $n_2 f_{ob} / n_1 = f_{im}$

$$\begin{aligned} ab + a f_{im} + b f_{ob} + f_{im} f_{ob} &= f_{ob}(b + f_{im}) + f_{im}(a + f_{ob}) \\ ab &= f_{im} f_{ob} \end{aligned}$$

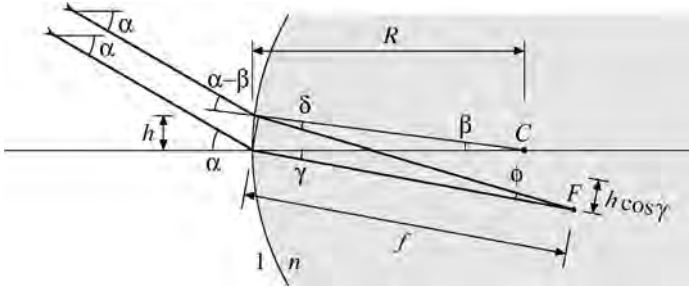
Esta relación es idéntica a la fórmula de Newton para los espejos (Ec. (P 2.13.1, 69)), pero con  $f_{im} f_{ob}$  en el lugar de  $f^2$ . Una superficie esférica refringente posee dos puntos focales, mientras que un espejo posee sólo un punto focal.

**3.16 Determine la distancia focal  $f$  para rayos paralelos que inciden sobre una esfera formando un ángulo  $\alpha$  con la normal, si el radio vale  $R$  y el índice de refracción  $n$ .**

Los ángulos y las distancias necesarios para resolver el problema se muestran en la Figura. El punto  $C$  simboliza el centro de la esfera y  $F$  el foco hacia donde convergen los rayos.

A partir de la ley de Snell y suponiendo  $\beta \ll 1$  se obtiene<sup>5</sup>

<sup>5</sup> La aproximación hasta primer orden se hace sustituyendo  $\phi \rightarrow \alpha$  y  $\theta \rightarrow \beta$  en la Ec. (A.7, 153).



$$\begin{cases} n \sin \gamma = \sin \alpha \\ n \sin \delta = \sin(\alpha - \beta) \approx \sin \alpha - \beta \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{P 3.16.1})$$

Así se concluye que

$$\sin \delta \approx \frac{\sin \alpha}{n} - \beta \frac{\cos \alpha}{n} = \sin \gamma - \beta \frac{\cos \alpha}{n \cos \gamma} \cos \gamma$$

y definiendo  $\beta' = \beta \cos \alpha / n \cos \gamma$

$$\sin \delta \approx \sin \gamma - \beta' \cos \gamma \approx \sin(\gamma - \beta')$$

Por lo tanto

$$\delta \approx \gamma - \beta' = \gamma - \beta \frac{\cos \alpha}{n \cos \gamma}$$

El rayo superior se desvía un ángulo  $(\alpha - \beta) - \delta$  y el rayo inferior un ángulo  $\alpha - \gamma$ . Como estos rayos son inicialmente paralelos, el ángulo final entre ambos vale

$$\phi = (\alpha - \gamma) - (\alpha - \beta - \delta) = \beta + \delta - \gamma \approx \beta - \beta \frac{\cos \alpha}{n \cos \gamma}$$

De la geometría en la Figura se deduce que

$$\begin{cases} h = R \sin \beta \approx R\beta \\ h \cos \gamma \approx f \tan \phi \approx f\phi \approx f\beta \left(1 - \frac{\cos \alpha}{n \cos \gamma}\right) \end{cases}$$

de manera que vale la aproximación

$$f\beta \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{n \cos \gamma} \right) = h \cos \gamma = R\beta \cos \gamma$$

esto es,

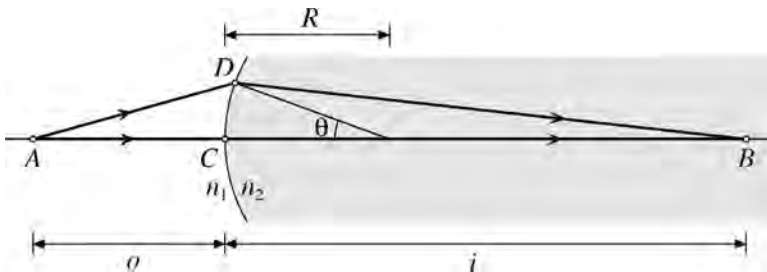
$$f = \frac{n \cos^2 \gamma}{n \cos \gamma - \cos \alpha} R$$

Note que los ángulos  $\alpha$  y  $\gamma$  se relacionan a través de ley de Snell  $\sin \alpha = n \sin \gamma$ . En particular, para  $\alpha = 0$  (incidencia normal) se obtiene  $\gamma = 0$  y

$$f = \frac{n \cos^2 0}{n \cos 0 - \cos 0} R = \frac{n}{n-1} R$$

que coincide con la distancia focal imagen definida en el Prob. 3.15 cuando  $n_1 = 1$  y  $n_2 = n$ .

**3.17** Considere una superficie convexa refringente de radio  $R$  que forma una imagen real. Usando el principio de Fermat, encuentre la fórmula de Descartes que relaciona las posiciones del objeto  $o$  y de la imagen  $i$ .



En la Figura el punto  $A$  corresponde al objeto y  $B$  a la imagen. De acuerdo con el principio de Fermat la luz viaja de  $A$  hasta  $B$  por la trayectoria que demora menos. Como la luz se propaga por  $A \rightarrow C \rightarrow B$ , se deduce que el tiempo  $t_{ACB}$  es mínimo. Pero la luz también puede ir por  $A \rightarrow D \rightarrow B$ , de manera que  $t_{ADB}$  también debe ser mínimo. Que los dos tiempos sean simultáneamente mínimos, implica que ambos son iguales  $t_{ACB} = t_{ADB}$ .

Las distancias que recorre el primer rayo son  $\overline{AC} = o$ ,  $\overline{CB} = i$ . Las velocidades en los dos tramos valen  $c/n_1$ ,  $c/n_2$ , respectivamente, de tal forma que

$$t_{ACB} = \frac{\overline{AC}}{c} + \frac{\overline{CB}}{c} = \frac{n_1 o}{c} + \frac{n_2 i}{c}$$

Para  $\theta \ll 1$  la distancia entre los puntos A y D es igual a<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \sqrt{(o + R[1 - \cos \theta])^2 + (R \sin \theta)^2} \approx \sqrt{\left(o + R \frac{\theta^2}{2}\right)^2 + (R\theta)^2} \\ &\approx \sqrt{o^2 + 2oR \frac{\theta^2}{2} + R^2 \theta^2} = o \left[ 1 + \left(\frac{R}{o} + \frac{R^2}{o^2}\right) \theta^2 \right]^{1/2}\end{aligned}$$

En las aproximaciones se usaron las Ecs. (A.3, 153) y (A.4, 153). Empleando ahora la Ec. (A.1, 153) con  $x = (R/o + R^2/o^2) \theta^2$  y  $a = 1/2$  se deduce que

$$\overline{AD} \approx o \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{o} + \frac{R^2}{o^2} \right) \theta^2 \right] = o + \left( R + \frac{R^2}{o} \right) \frac{\theta^2}{2}$$

De manera similar se calcula la distancia entre D y B

$$\overline{DB} = \sqrt{(i - R[1 - \cos \theta])^2 + (R \sin \theta)^2} \approx i + \left( -R + \frac{R^2}{i} \right) \frac{\theta^2}{2}$$

Así se obtiene que

$$\begin{aligned}t_{ADB} &= \frac{\overline{AD}}{c} + \frac{\overline{DB}}{c} \approx \frac{n_1}{c} \left[ o + \left( R + \frac{R^2}{o} \right) \frac{\theta^2}{2} \right] + \frac{n_2}{c} \left[ i + \left( -R + \frac{R^2}{i} \right) \frac{\theta^2}{2} \right] \\ &= \frac{n_1 o}{c} + \frac{n_2 i}{c} + \left[ n_1 \left( R + \frac{R^2}{o} \right) + n_2 \left( -R + \frac{R^2}{i} \right) \right] \frac{\theta^2}{2c}\end{aligned}$$

Para que  $t_{ACB}$  y  $t_{ADB}$  sean iguales es necesario que el término que multiplica  $\theta^2/2c$  en la última Ec. se anule

$$n_1 \left( R + \frac{R^2}{o} \right) + n_2 \left( -R + \frac{R^2}{i} \right) = 0$$

Dividiendo por  $R^2$

<sup>6</sup> Se asume la aproximación paraxial (ángulos pequeños) y en los cálculos se omiten términos de orden mayor o igual a  $\theta^4$ .

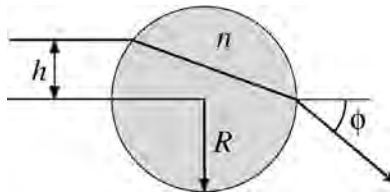
$$\frac{n_1}{R} + \frac{n_1}{o} - \frac{n_2}{R} + \frac{n_2}{i} = 0$$

y reordenando se encuentra finalmente

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

### 3.2. Problemas propuestos

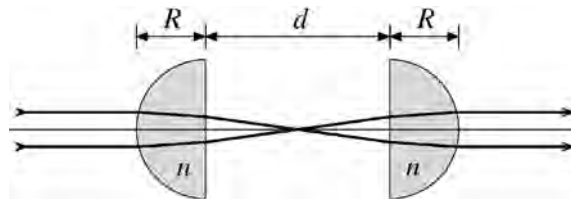
**3.18** Una esfera de radio  $R$  tiene un índice de refracción  $n$ . A una distancia  $h < R$  del eje que pasa por el centro incide un rayo de luz. Calcule el ángulo de desvío  $\phi$  después que atraviesa la esfera.



Resp.

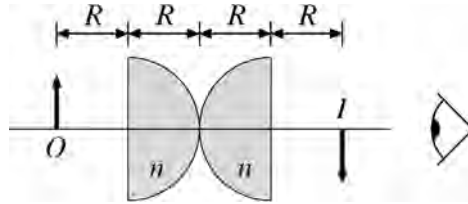
$$\phi = 2 \sin^{-1} \left[ \frac{h}{nR^2} \left( \sqrt{n^2 R^2 - h^2} - \sqrt{R^2 - h^2} \right) \right]$$

**3.19** Dos semiesferas de vidrio ( $n = 1,5$ ) de radio  $R = 3$  cm están separadas por una distancia  $d$ . Determine  $d$  para que cuando incidan rayos paralelos, los rayos transmitidos también sean paralelos.



Resp.  $d = 8$  cm

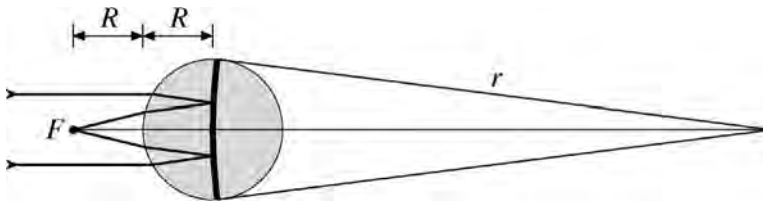
**3.20** Se disponen dos semiesferas transparentes de radio  $R$  como es mostrado en la Figura. Un objeto  $O$  se coloca a una distancia  $R$  de la primera superficie plana. (A) Determine el índice de refracción  $n$  de modo que la imagen  $I$  aparezca en la posición indicada. (B) ¿Cuánto vale la amplificación  $m$  en este caso?



Resp.  $n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618; m = -1$

**3.21** Un espejo convexo de radio  $r$  está incrustado en una esfera de vidrio ( $n = 1,5$ ) de radio  $R$ . El centro del espejo coincide con el centro de la esfera. Determine  $r$  para que, cuando rayos paralelos incidan sobre la esfera, estos se intercepten en el punto  $F$  a una distancia  $R$  del borde de la esfera.

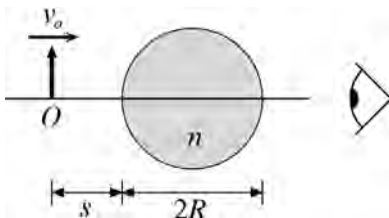
Resp.  $r = 8R$



**3.22** Un objeto se mueve con una velocidad  $ds/dt = -v_0 = \text{const}$  hacia una esfera de vidrio ( $n = 1,5$ ). Si el radio de la esfera es igual a  $R$ , encuentre la velocidad y la aceleración de la imagen cuando  $s = R$ .

Resp.  $v_i = 9 v_0; a_i = 36 v_0^2/R$





**3.23** El índice de refracción de un cierto material varía con la distancia  $r$  hasta el centro según la fórmula

$$n = n_0 \frac{a}{r} \ln \frac{r}{a} > 1$$

donde  $n_0$  y  $a$  son constantes positivas. Sabiendo que un rayo de luz pasa por el punto  $(r, \theta) = (R, 0)$  formando un ángulo de  $90^\circ$  con el radio  $r$ , calcule la trayectoria del rayo.

Sug.

$$c \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \sqrt{n_0^2 a^2 \left( \ln \frac{r}{a} \right)^2 - c^2}} = \frac{c}{n_0 a} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{u^2 - c^2}} = \frac{c}{n_0 a} \ln \left| \frac{u + \sqrt{u^2 - c^2}}{u_0 + \sqrt{u_0^2 - c^2}} \right|$$

donde  $u = n_0 a \ln(r/a)$ .

Resp.  $\frac{r}{a} = \left( \frac{R}{a} \right)^{\cosh \psi}$  siendo  $\psi = \frac{\theta}{\ln \frac{R}{a}}$



## CAPÍTULO 4

### LENTE DELGADAS

Dos superficies esféricas refringentes separadas por una distancia que es pequeña en comparación con los radios de curvatura, forman una lente delgada. La luz se refracta al entrar y al salir de la lente, lo que cambia la dirección de propagación. El estudio de lentes es similar al de espejos esféricos, pero, como sucede con las superficies esféricas refringentes, el observador se encuentra al lado donde se transmite la luz.

El cálculo de la distancia focal y la fórmula de Descartes son fundamentales en el estudio de lentes.

- Eje óptico: o eje principal de una lente es la recta que pasa por los centros de los radios de curvatura.
- Centro óptico: cualquier rayo que pasa por este punto emerge en una dirección paralela a la del rayo incidente. Mientras mayor es el ángulo con el eje óptico, mayor el desvío lateral. En particular, si el rayo coincide con el eje óptico no hay desvío.

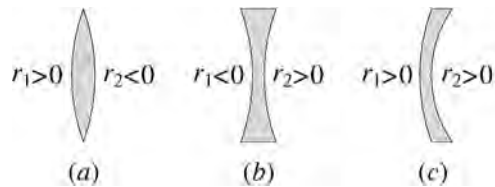


Figura 4.1: Las lentes se clasifican conforme la concavidad de las superficies: (a) biconvexa con  $f > 0$ , (b) biconcava con  $f < 0$  y (c) mixta. Al lado de cada superficie se indica el signo del radio que se debe usar en la Ec. (4.1) para el cálculo de la distancia focal.

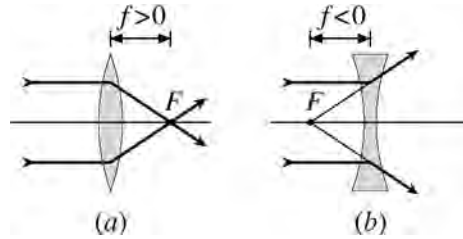


Figura 4.2: Ejemplo de rayos paralelos transmitidos a través de una lente (a) convergente y (b) divergente. Por lo general, en una lente convergente el centro de la lente es más grueso que los bordes, mientras que en una lente divergente se verifica lo contrario. El punto  $F$  indica donde se halla el foco imagen y  $f$  representa la distancia focal.

- **Focos:** en contraste con un espejo, una lente posee dos puntos focales. El foco objeto y el foco imagen se encuentran localizados simétricamente en una lente delgada. La distancia focal  $f$  se calcula con la Ec. de los fabricantes de lentes

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (4.1)$$

Aquí  $n$  representa el índice de refracción y  $r_1, r_2$  los radios de curvatura de las superficies (Fig. 4.1). Si la lente está inmersa en un medio con índice de refracción  $n_0$ , se debe sustituir  $n$  por  $n/n_0$ .

La lente se denomina convergente cuando  $f > 0$  y divergente cuando  $f < 0$ . En el primer caso, rayos paralelos convergen sobre el foco (Fig. 4.2 (a)), al tiempo que, en el segundo caso, los rayos transmitidos se ven como si divergieran desde el foco (Fig. 4.2 (b)).

Cuadro 4.1: Resumen de la convención de signos para espejos y lentes.

	espejos		lentes	
	+	-	+	-
objeto: $o$	izquierda	derecha	izquierda	derecha
imagen: $i$	izquierda	derecha	derecha	izquierda
radio: $r$	cóncava	convexa	convexa	cóncava

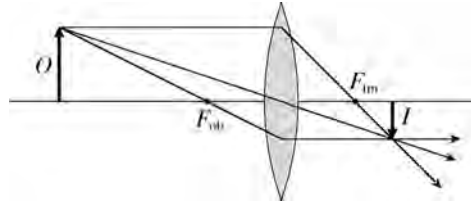


Figura 4.3: Construcción gráfica de la imagen  $I$  formada por una lente convergente. Se trazan tres rayos: el superior que pasa por el foco imagen  $F_{im}$ , otro por el centro óptico y el inferior por el foco objeto  $F_{ob}$ . La intersección de dos de estas líneas es suficiente para determinar la imagen formada.

El inverso de la distancia focal se expresa en una unidad conocida como dioptría (= metros<sup>-1</sup>). Por ejemplo, una lente con una potencia de  $-2$  dioptrías tiene una distancia focal igual a  $1/(-2) = -0,5$  m y es divergente.

- **Objeto-Imagen:** si la luz que incide es aproximadamente paralela al eje óptico, la Ec. que relaciona la posición  $o$  del objeto, la posición  $i$  de la imagen y la distancia focal  $f$  es idéntica a la Ec. del espejo

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \quad (4.2)$$

También se conoce como fórmula de Descartes para lentes delgadas. La convención para los signos de  $o$  e  $i$  es la misma que se usó para las superficies esféricas refringentes (Cuadro 4.1).

Un objeto real produce siempre una imagen virtual cuando la lente es divergente, pero si la lente es convergente la imagen puede ser real (el objeto está antes del foco objeto) o virtual (el objeto entre el foco y la lente). Para localizar gráficamente la imagen se traza un par de rayos y se ve en que punto se interceptan (Fig. 4.3).

La amplificación lateral se determina con la fórmula

$$m = -\frac{i}{o} \quad (4.3)$$

que es idéntica a la Ec. (2.4, 50). Una imagen real aparece invertida con respecto al objeto, pero una imagen virtual tiene el mismo sentido.

## 4.1. Problemas resueltos

**4.1 Una lente biconvexa está formada por un vidrio con índice de refracción  $n = 1,5$ . Si la distancia focal vale 45 mm y el radio de curvatura de una superficie es el triple de la otra, calcule los radios.**

La lente corresponde a la Fig. 4.1 (a) donde  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$ , de tal forma que según el enunciado del problema  $r_1 = R$  y  $r_2 = -3R$ . Usando la Ec. de los fabricantes de lentes se obtiene

$$\frac{1}{45} = (1,5 - 1) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{-3R} \right) = 0,5 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} \right) = 0,5 \frac{4}{3R} = \frac{2}{3R}$$

$$R = \frac{2}{3} 45 = 30 \text{ mm}$$

Los radios de las superficies son entonces  $R = 3 \text{ cm}$  y  $3R = 3 \times 3 = 9 \text{ cm}$ .

**4.2 El cristalino de un ojo equivale a una lente biconvexa flexible con ambos radios iguales, pero cuyos valores pueden variar para enfocar la imagen sobre la retina. El índice de refracción del cristalino es 1,56 y para simplificar el problema asuma que el humor vítreo (líquido entre el cristalino y la retina) tiene un índice igual a 1. El cristalino debe formar una imagen sobre la retina a una distancia  $i = 3 \text{ cm}$  constante cuando la posición del objeto varía entre el infinito y 25 cm. Determine cuáles son sus radios mínimo y máximo.**

Si el objeto se encuentra en el infinito  $o_1 = \infty$  y la imagen se forma en  $i_1 = 3 \text{ cm}$ , entonces, de acuerdo con la fórmula de Descartes, la distancia focal vale

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{o_1} + \frac{1}{i_1} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3}$$

$$f_1 = 3 \text{ cm}$$

De forma análoga para  $o_2 = 25$  cm e  $i_2 = 3$  cm resulta

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{o_2} + \frac{1}{i_2} = \frac{1}{25} + \frac{1}{3} = \frac{3 + 25}{75}$$

$$f_2 = \frac{75}{28} \text{ cm}$$

Ya que en este problema los radios de la lente biconvexa (Fig. 4.1 (a)) son iguales, usando la fórmula de de los fabricantes de lentes se deduce que

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{-R} \right) = (1,56 - 1) \frac{2}{R}$$

$$R = 0,56 \times 2f = 1,12f$$

En el primer caso se obtiene

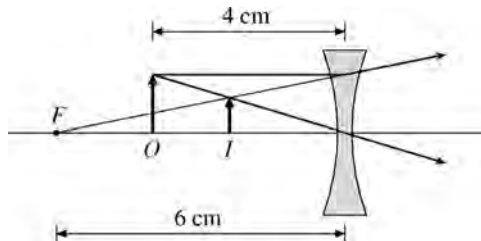
$$R_1 = 1,12 \times 3 = 3,36 \text{ cm}$$

y en el segundo

$$R_2 = 1,12 \frac{75}{28} = 3,0 \text{ cm}$$

Luego el radio de curvatura del cristalino debe variar entre 3,36 cm y 3,0 cm para enfocar un objeto que se mueve desde el infinito hasta 25 cm. Si la distancia es menor que 25 cm, entonces no se consigue enfocar la imagen sobre la retina y ésta se torna borrosa.

**4.3** *Un objeto está a 4 cm de una lente divergente que tiene una distancia focal igual a -6 cm. (A) ¿Dónde se forma la imagen? (B) ¿Cuánto vale la amplificación? (C) Clasifique la imagen formada.*



(A) La posición de la imagen se calcula con la fórmula de Descartes

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = \frac{1}{-6} - \frac{1}{4} = \frac{-2-3}{12}$$

$$i = \frac{12}{-5} = -2,4 \text{ cm}$$

(B) La amplificación vale

$$m = -\frac{i}{o} = \frac{2,4}{4} = 0,6$$

(C) De acuerdo con los resultados que se obtuvieron en (A) y (B), la imagen es virtual y directa, pues  $i < 0$  y  $m > 0$ , respectivamente. Además el tamaño de la imagen es menor que el objeto.

**4.4 Una lupa con distancia focal 2,5 cm se sostiene a 2,0 cm de una letra de tamaño 0,5 mm. ¿Cómo se ve la imagen?**

Usando la Ec. de la lente se determina la posición donde se forma la imagen

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = \frac{1}{2,5} - \frac{1}{2,0} = \frac{2-2,5}{5}$$

$$i = \frac{5}{-0,5} = -10 \text{ cm}$$

Con esto la amplificación lateral vale

$$m = -\frac{i}{o} = \frac{10}{2,0} = 5$$

Luego, el tamaño de la letra vista con la lupa es igual a  $5 \times 0,5 = 2,5$  mm. Note que la imagen es directa, lo que significa que tiene el mismo sentido que la letra original.

**4.5 Una lente tiene una distancia focal de 40 cm. Halle la posición del objeto que produce una imagen (A) real y 4 veces mayor, (B) real y 4 veces menor, (C) virtual y 4 veces menor.**



El problema entrega como dato el módulo de la amplificación  $m$ , pero no dice si es positiva o negativa. Sin embargo, la imagen es real si esta se encuentra a la derecha ( $i$  positivo) y virtual si se encuentra a la izquierda ( $i$  negativo). Ya que se trata de un objeto real ( $o > 0$ ), se concluye que  $m = -i/o$  es menor que cero para una imagen real y mayor que cero para una imagen virtual.

(A) En este caso se tiene  $m = -4 < 0$ , lo que corresponde a una imagen real 4 veces mayor. Por lo tanto

$$-4 = -\frac{i}{o}$$

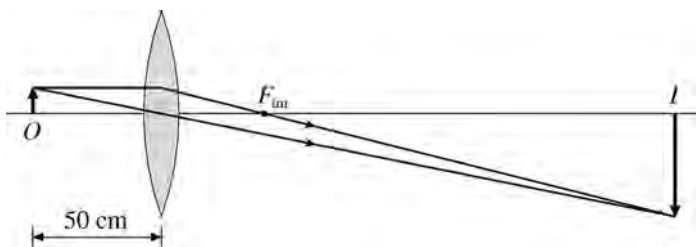
$$\frac{1}{i} = \frac{1}{4o}$$

Usando la fórmula de Descartes con  $f=40$  cm se determina la posición del objeto

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$$

$$\frac{1}{40} = \frac{1}{o} + \frac{1}{4o} = \frac{4+1}{4o}$$

$$o = \frac{5}{4} 40 = 50 \text{ cm}$$



(B) Para una imagen real 4 veces menor  $m = -1/4$  y

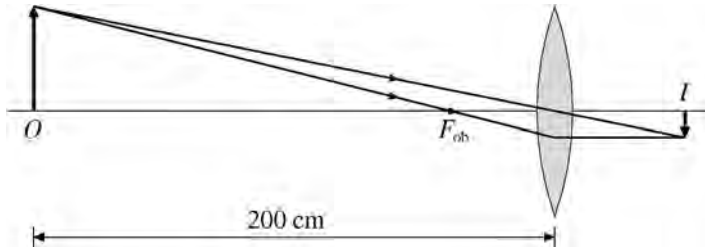
$$-\frac{1}{4} = -\frac{i}{o}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{4}{o}$$

de manera que

$$\frac{1}{40} = \frac{1}{o} + \frac{4}{o} = \frac{1+4}{o}$$

$$o = 5 \times 40 = 200 \text{ cm}$$



(C) Finalmente, la imagen es virtual y 4 veces mayor, o sea,  $m = 4$ . Luego

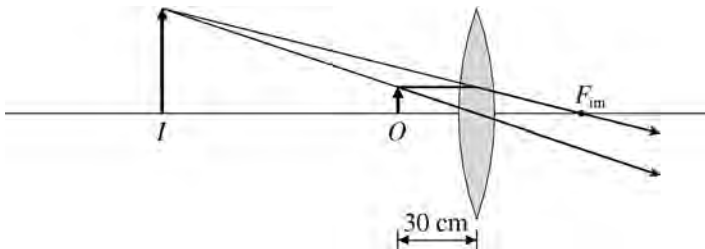
$$4 = -\frac{i}{o}$$

$$\frac{1}{i} = -\frac{1}{4o}$$

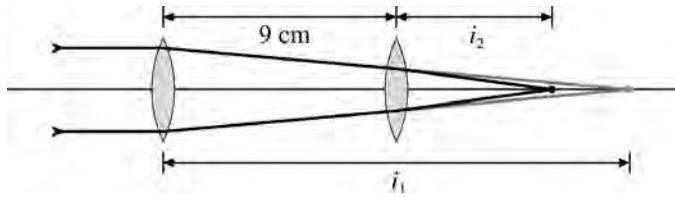
y así se obtiene que

$$\frac{1}{40} = \frac{i}{o} - \frac{1}{4o} = \frac{4-1}{4o}$$

$$o = \frac{3}{4} 40 = 30 \text{ cm}$$



**4.6** Un instrumento óptico está compuesto por dos lentes idénticas de distancia focal  $+18 \text{ cm}$  separadas por una distancia de  $9 \text{ cm}$ . Encuentre la posición del foco medida a partir de la lente más cercana.



Cuando rayos paralelos inciden sobre el sistema óptico, los rayos convergen sobre su foco. Luego, se debe considerar un objeto localizado en el infinito y calcular el punto donde se forma la imagen final. Sustituyendo  $o_1 = \infty$  en la fórmula de Descartes

$$\frac{1}{i_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o_1} = \frac{1}{18} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{18} - 0$$

$$i_1 = 18 \text{ cm}$$

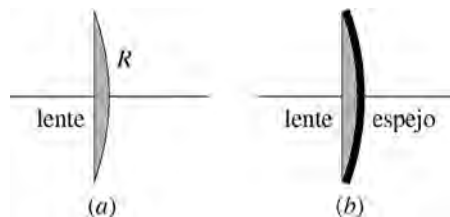
La primera imagen se encuentra a la derecha de la segunda lente pues  $i_1 > 9 \text{ cm}$ . Esta imagen equivale al segundo objeto (virtual) y su posición es  $o_2 = 9 - i_1 = -9 \text{ cm}$ . Así

$$\frac{1}{i_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o_2} = \frac{1}{18} - \frac{1}{-9} = \frac{1+2}{18}$$

$$i_2 = \frac{18}{3} = 6 \text{ cm}$$

O sea, la distancia focal vale 6 cm con respecto a la segunda lente.

**4.7 (A)** Una lente se construye usando un vidrio con índice de refracción  $n = 1,5$ . Sabiendo que un lado es plano y el otro cóncavo con un radio  $R = 12 \text{ cm}$  (Fig. (a)), halle la distancia focal de la lente. **(B)** Calcule la distancia focal equivalente cuando se recubre el lado esférico de la lente con un espejo que tiene el mismo radio (Fig. (b)).



(A) Los radios de la lente son  $r_1 = \infty$  (pues la primera superficie es plana) y  $r_2 = -12$  cm (la segunda superficie es cóncava). Reemplazando estos valores y  $n = 1,5$  en la Ec. de los fabricantes de lentes se determina la distancia focal

$$\frac{1}{f_{\text{len}}} = (1,5 - 1) \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{-12} \right) = 0,5 \left( 0 + \frac{1}{12} \right)$$

$$f_{\text{len}} = \frac{12}{0,5} = 24 \text{ cm}$$

(B) Para responder esta pregunta, es necesario encontrar la posición final de la imagen formada por un objeto que está en el infinito cuando la luz se transmite a través de la lente, se refleja en el espejo y, finalmente, se vuelve a transmitir por la lente, pero en el sentido contrario. En la primera etapa se obtiene con  $o_1 = \infty$

$$\frac{1}{i_1} = \frac{1}{f_{\text{len}}} - \frac{1}{o_1} = \frac{1}{24} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{24} - 0$$

$$i_1 = 24 \text{ cm}$$

Note que la imagen se forma sobre el foco de la lente, pues los rayos incidentes son paralelos. Esta imagen corresponde al objeto para el espejo. La lente y el espejo se encuentran juntos, de modo que la separación vale cero y la posición del objeto (virtual) es  $o_2 = 0 - i_1 = -24$  cm. El espejo cóncavo tiene una distancia focal  $f_{\text{esp}} = +r/2 = 6$  cm y la imagen reflejada se encuentra en

$$\frac{1}{i_2} = \frac{1}{f_{\text{esp}}} - \frac{1}{o_2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{-24} = \frac{4 + 1}{24}$$

$$i_2 = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ cm}$$

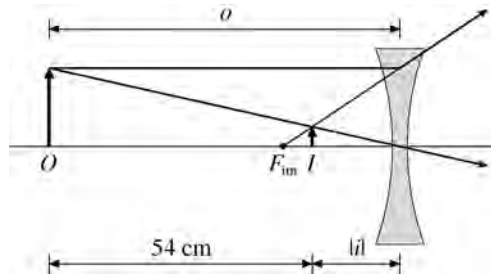
La imagen está a la izquierda del espejo pues  $i_2 > 0$ . Ya que la luz se propaga en sentido contrario, el tercer objeto se halla en la posición  $o_3 = 0 - i_2 = -4,8$  cm y es virtual. La lente forma la tercera imagen en

$$\frac{1}{i_3} = \frac{1}{f_v} - \frac{1}{o_3} = \frac{1}{24} - \frac{1}{-4,8} = \frac{1 + 5}{24}$$

$$i_3 = \frac{24}{6} = 4 \text{ cm}$$

Así, se obtiene una distancia focal equivalente 4 cm al igual que en el Prob. 3.9.

**4.8** Una lente divergente produce una imagen 4 veces menor que el objeto cuando la separación entre la imagen y el objeto es 54 cm. Halle (A) las posiciones  $o$  del objeto, (B)  $i$  de la imagen y (C) la distancia focal  $f$  de la lente.



(A) Un objeto real ( $o > 0$ ) frente a una lente divergente ( $f < 0$ ) forma una imagen virtual ( $i < 0$ ), de tal forma que la amplificación  $m = -i/o$  es positiva. Así se concluye que  $m = +1/4$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= -\frac{i}{o} \\ i &= -\frac{o}{4} \end{aligned} \quad (\text{P 4.8.1})$$

y, por lo tanto,  $o > |i|$ . Dado que la separación entre el objeto y la imagen vale 54 cm

$$54 = o - |i| = o + i$$

Reemplazando (P 4.8.1) en la última Ec. se encuentra que

$$54 = o - \frac{o}{4} = \frac{4-1}{4} o$$

$$o = \frac{4}{3} 54 = 72 \text{ cm}$$

(B) Sustituyendo el valor de  $o$  en la Ec. (P 4.8.1), se calcula donde está la imagen

$$i = -\frac{o}{4} = -\frac{72}{4} = -18 \text{ cm}$$

es decir, 18 cm a la izquierda de la lente.

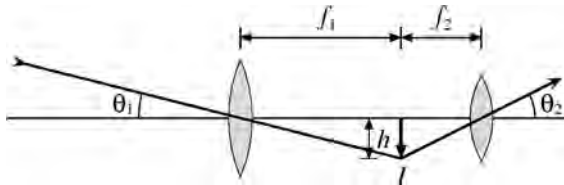
(C) Finalmente, la distancia focal se obtiene con la fórmula de Descartes

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{72} + \frac{1}{-18} = \frac{1-4}{72}$$

$$f = \frac{72}{-3} = -24 \text{ cm}$$

Observe que  $f < 0$  como debe ser para una lente divergente.

**4.9 Un telescopio de refracción está formado por dos lentes de distancias focales  $f_1 = 70$  cm y  $f_2 = 2$  cm, separadas por una distancia igual a  $f_1 + f_2$ . Calcule la amplificación angular  $\theta_2/\theta_1$ .**



En el caso de un telescopio, el objeto que se observa está muy lejos y se puede considerar como si estuviese en el infinito. Luego la imagen  $I$  aparece invertida sobre el foco de la primera lente y equivale al objeto para la segunda lente. Este objeto coincide con el foco de la segunda lente, de manera que la imagen final aparece en el infinito.

La luz proveniente del objeto lejano abarca un ángulo visual  $\theta_1$ , y después que pasa por el telescopio abarca un ángulo  $\theta_2$ . De esta manera, si  $\theta_2 > \theta_1$  la

imagen se ve aumentada. Representando por  $h$  la altura de la imagen que se forma entre las dos lentes, los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  se pueden calcular con las fórmulas

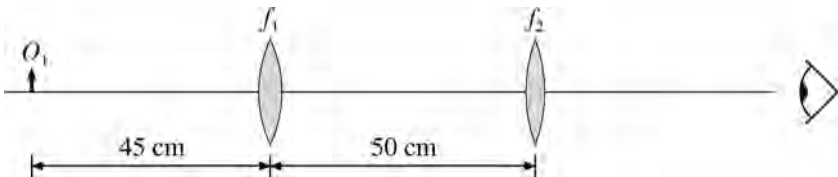
$$\begin{cases} \tan \theta_1 = \frac{h}{f_1} \\ \tan \theta_2 = \frac{h}{f_2} \end{cases}$$

Como estos ángulos son pequeños, se encuentra que la amplificación angular vale

$$m_\theta = \frac{\theta_2}{\theta_1} \approx \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\frac{h}{f_2}}{\frac{h}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{70}{2} = 35$$

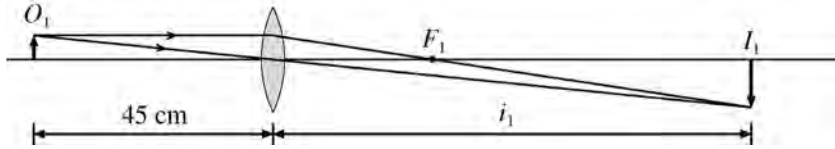
Note que la imagen final es virtual y está invertida, o sea, tiene sentido opuesto al objeto.<sup>1</sup>

**4.10** Una lente con distancia focal  $f_1 = 30$  cm está colocada a 50 cm de otra lente con distancia focal  $f_2 = 40$  cm. Si a 45 cm de la primera lente se coloca el objeto  $O_1$ , encuentre la posición y la amplificación de la imagen formada.



El problema se resuelve en dos etapas.

<sup>1</sup> Si el ángulo  $\theta_1$  crece, entonces  $\theta_2$  también crece. Esto significa que cuando el objeto se mueve hacia arriba, la imagen se mueve hacia abajo, es decir, al revés.

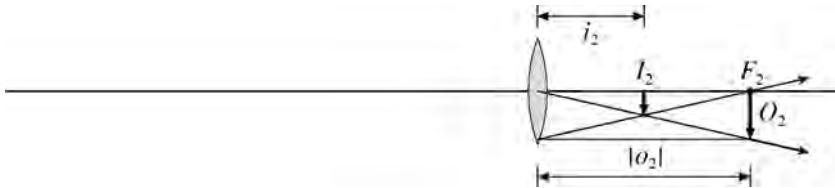


Considerando la primera lente se encuentra la siguiente posición para la imagen

$$\frac{1}{i_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{o_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{45} = \frac{3 - 2}{90}$$

$$i_1 = 90 \text{ cm}$$

La imagen  $I_1$  equivale al objeto  $O_2$  para la segunda lente.



Este objeto aparece en  $o_2 = 50 - 90 = -40$  cm y es virtual,<sup>2</sup> de manera que la imagen se forma en

$$\frac{1}{i_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{o_2} = \frac{1}{40} - \frac{1}{-40} = \frac{1 + 1}{40}$$

$$i_2 = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}$$

La imagen final se encuentra 20 cm a la derecha de la segunda lente y es real.

<sup>2</sup> Observe que la posición del objeto coincide con el foco imagen. Si estuviera sobre el foco objeto en vez del foco imagen, entonces la imagen se formaría en el infinito.

En el trazado de rayos de la última Figura, el rayo que sale del objeto virtual  $O_2$  paralelo al eje (hacia atrás), se *refleja* en la lente y pasa por el foco imagen  $F_2$  (recta con pendiente positiva). El rayo que sale del objeto y pasa por el centro óptico, se *refleja* de vuelta por la misma trayectoria (recta con pendiente negativa). La intersección de las dos rectas muestra dónde se forma la imagen  $I_2$ .

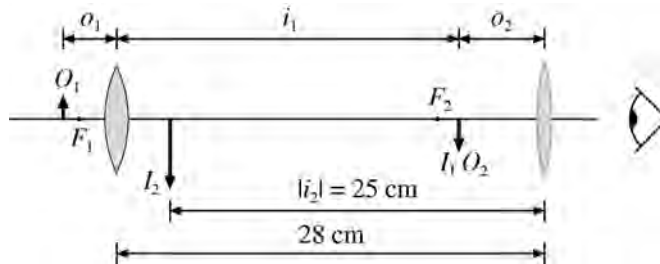


Por último, la amplificación total se calcula multiplicando las amplificaciones de las dos lentes

$$m = m_1 m_2 = \left( -\frac{i_1}{o_1} \right) \left( -\frac{i_2}{o_2} \right) = -\frac{90}{45} \frac{20}{40} = -1$$

La imagen tiene el mismo tamaño que el objeto inicial pero está invertida.

**4.11** El microscopio óptico compuesto mostrado en la Figura está formado por una lente objetiva con distancia focal  $f_1 = 1,8$  cm y una ocular con  $f_2 = 3,2$  cm. La separación entre las lentes es 28 cm y la imagen final  $I_2$  se forma a 25 cm de la ocular. (A) Encuentre la posición del objeto  $O_1$  relativa al foco  $F_1$  de la primera lente. (B) Calcule la amplificación del microscopio. (C) ¿Cómo varía la amplificación, si la separación  $o_1$  que hay entre el objeto y la objetiva se incrementa hasta  $o_1 + a$ , siendo  $a = 1 \mu\text{m}$ ?



(A) En este problema se conoce la posición de la imagen final  $i_2 = -25$  cm, con lo que se puede determinar la posición del segundo objeto  $O_2$  que genera esta imagen

$$\frac{1}{o_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{i_2} = \frac{1}{3,2} - \frac{1}{-25} = \frac{25 + 3,2}{80}$$

$$o_2 = \frac{80}{28,2} = 2,837 \text{ cm}$$

El objeto  $O_2$  corresponde a la imagen  $I_1$  que forma la objetiva, la cual está localizada a una distancia  $i_1 = 28 - o_2 = 25,163$  cm de la primera lente. Así se obtiene

$$\frac{1}{o_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{i_1} = \frac{1}{1,8} - \frac{1}{25,163} = 0,5158$$

$$o_1 = \frac{1}{0,5158} = 1,939 \text{ cm} = 1,8 \text{ cm} + 0,139 \text{ cm}$$

lo que implica que el objeto se encuentra  $0,139 \text{ cm} \approx 1,4 \text{ mm}$  a la izquierda de  $F_1$ .

**(B)** La amplificación total es igual al producto de las amplificaciones de la primera y de la segunda lentes

$$m = m_1 m_2 = \left( -\frac{i_1}{o_1} \right) \left( -\frac{i_2}{o_2} \right) = -\frac{25,163}{1,939} \frac{25}{2,837} = -114,4$$

La imagen vista a través del microscopio aparece aumentada 114,4 veces y se encuentra invertida con respecto al objeto.

**(C)** En este ítem primero hay que calcular las posiciones de las imágenes cuando  $o_1 \rightarrow o_1 + a$ , siendo  $a \ll o_1$ . Representando por  $i_1 + b$  la nueva posición de la primera imagen, se encuentra que

$$\frac{1}{o_1 + a} + \frac{1}{i_1 + b} = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{o_1} + \frac{1}{i_1}$$

$$\frac{1}{o_1 + a} - \frac{1}{o_1} = \frac{1}{i_1} - \frac{1}{i_1 + b}$$

y considerando la aproximación hasta primer orden<sup>3</sup>

$$-\frac{a}{o_1^2} \approx \frac{b}{i_1^2}$$

$$b \approx -a \frac{i_1^2}{o_1^2} = -am_1^2 \quad (\text{P 4.11.1})$$

<sup>3</sup> Para  $\delta \ll x$  vale la aproximación (Ec. (A.1, 153))

$$\frac{1}{x + \delta} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left[ \left( 1 + \frac{\delta}{x} \right)^{-1} - 1 \right] \approx \frac{1}{x} \left[ 1 - \frac{\delta}{x} - 1 \right] = -\frac{\delta}{x^2}$$

Las posiciones del segundo objeto y de la segunda imagen son  $o_2 - b$  e  $i_2 + c$ , con  $b \ll o_2$  y  $c \ll i_2$ . Análogamente se puede encontrar una relación entre  $b$  y  $c$

$$\begin{aligned}\frac{1}{o_2 - b} + \frac{1}{i_2 + c} &= \frac{1}{f_2} = \frac{1}{o_2} + \frac{1}{i_2} \\ \frac{1}{o_2 - b} - \frac{1}{o_2} &= \frac{1}{i_2} - \frac{1}{i_2 + c} \\ \frac{b}{o_2^2} &\approx \frac{c}{i_2^2} \\ c &\approx b \frac{i_2^2}{o_2^2} = bm_2^2\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$c \approx -am_1^2 m_2^2 = -am^2 \quad (\text{P 4.11.2})$$

La nueva amplificación se calcula con las Ecs. (P 4.11.1) y (P 4.11.2)

$$\begin{aligned}m + \Delta m &= \left( -\frac{i_1 + b}{o_1 + a} \right) \left( -\frac{i_2 + c}{o_2 - b} \right) \\ &= \left( -\frac{i_1}{o_1} \right) \left( -\frac{i_2}{o_2} \right) \left( 1 + \frac{a}{o_1} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{b}{i_1} \right) \left( 1 - \frac{b}{o_2} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{c}{i_2} \right) \\ &\approx m \left( 1 - \frac{a}{o_1} \right) \left( 1 + \frac{b}{i_1} \right) \left( 1 + \frac{b}{o_2} \right) \left( 1 + \frac{c}{i_2} \right) \\ &\approx m \left( 1 - \frac{a}{o_1} + \frac{b}{i_1} + \frac{b}{o_2} + \frac{c}{i_2} \right) \\ &= m \left( 1 - \frac{a}{o_1} - \frac{am_1^2}{i_1} - \frac{am_1^2}{o_2} - \frac{am^2}{i_2} \right)\end{aligned}$$

o sea

$$\Delta m \approx -ma \left( \frac{1}{o_1} + \frac{m_1^2}{i_1} + \frac{m_1^2}{o_2} + \frac{m^2}{i_2} \right)$$

Sustituyendo los valores numéricos se encuentra para la primera amplificación

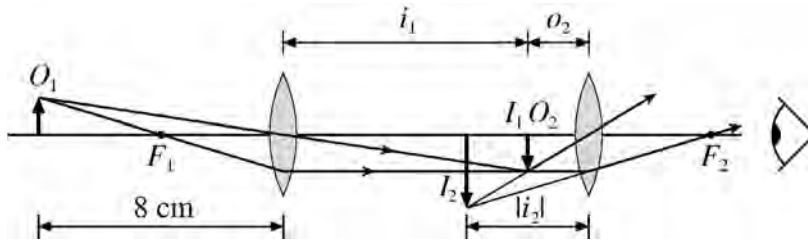
$$m_1 = -\frac{i_1}{o_1} = -\frac{25,163}{1,939} = -12,98$$

y finalmente<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}\Delta m &= -(-114,4) \times 10^{-4} \left( \frac{1}{1,939} + \frac{(-12,98)^2}{25,163} + \frac{(-12,98)^2}{2,837} + \frac{(-114,4)^2}{-25} \right) \\ &= -5,2\end{aligned}$$

La amplificación vale entonces  $m + \Delta m = -119,6$ , lo que indica que su módulo aumenta 4,5%.

**4.12** Un objeto  $O_1$  se encuentra a 8 cm de una lente que tiene una distancia focal igual a 4 cm. A una cierta distancia de la primera lente se coloca otra lente idéntica. Si la imagen final  $I_2$  es virtual y dos veces mayor que  $O_1$ , determine la separación entre las lentes.



La posición de la primera imagen es

$$\begin{aligned}\frac{1}{i_1} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{o_1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\ i_1 &= 8 \text{ cm}\end{aligned}$$

y su amplificación vale

$$m_1 = -\frac{i_1}{o_1} = -\frac{8}{8} = -1$$

<sup>4</sup>  $a = 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m} = 10^{-4} \text{ cm}$ .

Esto significa que la imagen  $I_1$  es real, tiene el mismo tamaño, pero se encuentra invertida.

El módulo de la amplificación resultante producida por las lentes es igual a 2

$$|m| = 2$$

y como

$$m = m_1 m_2 = -m_2$$

se deduce que  $|m_2| = 2$ . De acuerdo con el enunciado, la imagen final  $I_2$  es virtual y, por lo tanto,  $i_2 < 0$ . Suponiendo que el segundo objeto  $O_2$  sea real ( $o_2 > 0$ ), se concluye que la amplificación  $m_2 = -i_2/o_2$  debe ser positiva, de manera que  $m_2 = +2$  e  $i_2 = -m_2 o_2 = -2 o_2$ . Sustituyendo  $i_2$  en la fórmula de Descartes se calcula la posición del objeto

$$\begin{aligned} \frac{1}{o_2} + \frac{1}{-2o_2} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{2o_2} &= \frac{1}{4} \\ o_2 &= \frac{4}{2} = 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

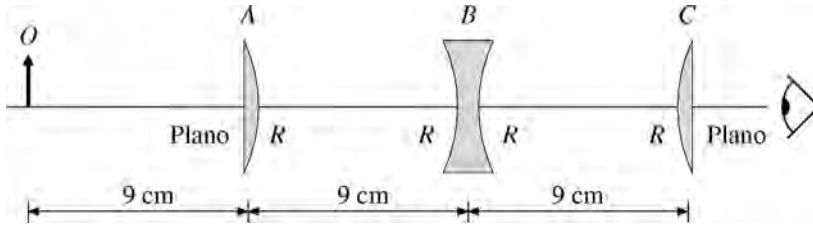
Finalmente, la separación entre las dos lentes se determina sumando las distancias  $i_1 + o_2 = 8 + 2 = 10$  cm.

Si el segundo objeto fuese virtual, procediendo análogamente se obtendrían los siguientes valores

$$\begin{cases} m_2 = -2 \\ i_2 = 2o_2 \\ o_2 = 6 \text{ cm} \end{cases}$$

lo que sería una contradicción, pues  $o_2 < 0$  para un objeto virtual. Luego este caso no puede ocurrir y la respuesta correcta es la anterior.

**4.13** Tres lentes delgadas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  están dispuestas como en la Figura. (A) Sabiendo que el índice de refracción del material con que se fabricaron las lentes es igual a 1,5 y que los radios de curvatura  $R$  valen 9 cm, calcule las distancias focales  $f_A$ ,  $f_B$ ,  $f_C$ . (B) Si se coloca un objeto  $O$  a 9 cm de la lente  $A$ , determine la posición y la amplificación de la imagen vista a través del sistema óptico.



(A) Las distancias focales se calculan con la Ec. de los fabricantes de lentes. Observando la convención de signos para los radios en la Fig. 4.1 y recordando que  $r = \infty$  para las superficies planas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f_A} = (1,5 - 1) \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{-9} \right) = 0,5 \left( 0 + \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{18} \quad , \quad f_A = 18 \text{ cm} \\ \frac{1}{f_B} = (1,5 - 1) \left( \frac{1}{-9} - \frac{1}{9} \right) = 0,5 \left( -\frac{2}{9} \right) = -\frac{1}{9} \quad , \quad f_B = -9 \text{ cm} \\ \frac{1}{f_C} = (1,5 - 1) \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{\infty} \right) = 0,5 \left( \frac{1}{9} + 0 \right) = \frac{1}{18} \quad , \quad f_C = 18 \text{ cm} \end{array} \right.$$

En particular, las lentes  $A$  y  $C$  son idénticas pero se encuentran invertidas. En una lente delgada la distancia focal no depende del sentido considerado, de modo que los valores de  $f_A$  y  $f_C$  tienen que ser iguales.

(B) A continuación se determinan las sucesivas posiciones de los objetos y de las respectivas imágenes, empezando por la lente  $A$ . Según los datos del Problema, la posición del primer objeto es  $o_A = 9$  cm y

$$\frac{1}{i_A} = \frac{1}{f_A} - \frac{1}{o_A} = \frac{1}{18} - \frac{1}{9} = \frac{1-2}{18}$$

$$i_A = \frac{18}{-1} = -18 \text{ cm}$$

Esta imagen funciona como objeto para la lente B y se encuentra en  $o_B = 9 - i_A = 9 + 18 = 27 \text{ cm}$ . Luego

$$\frac{1}{i_B} = \frac{1}{f_B} - \frac{1}{o_B} = \frac{1}{-9} - \frac{1}{27} = -\frac{3+1}{27}$$

$$i_B = -\frac{27}{4} = -6,75 \text{ cm}$$

Considerando la lente C se tiene  $o_C = 9 - i_B = 9 + 6,75 = 15,75 \text{ cm}$ , con lo que la imagen final está en

$$\frac{1}{i_C} = \frac{1}{f_C} - \frac{1}{o_C} = \frac{1}{18} - \frac{1}{15,75} = \frac{7-8}{126}$$

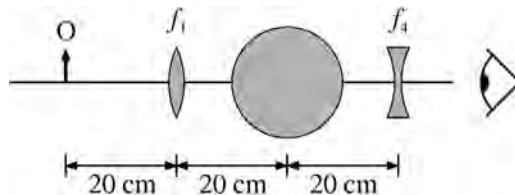
$$i_C = \frac{126}{-1} = -126 \text{ cm}$$

Por último, la amplificación total se determina multiplicando las amplificaciones de cada lente

$$m = m_A m_B m_C = \left(-\frac{i_A}{o_A}\right) \left(-\frac{i_B}{o_B}\right) \left(-\frac{i_C}{o_C}\right) = \frac{18}{9} \frac{6,75}{27} \frac{126}{15,75} = 4$$

Así, se concluye que la imagen se forma 126 cm detrás de la lente C, es directa y se ve cuatro veces más grande que el objeto.

**4.14** Un sistema óptico está constituido por una lente convergente ( $f_1 = +12 \text{ cm}$ ), una esfera de vidrio (diámetro 20 cm, índice de refracción 1,5) y una lente divergente ( $f_4 = -14 \text{ cm}$ ) como es ilustrado en la Figura. Si un objeto O se encuentra a 20 cm de la lente convergente, obtenga la posición y la amplificación de la imagen vista a través de la lente divergente.



El problema se puede dividir en cuatro partes: primero, la transmisión de la luz por la lente convergente; segundo, cuando entra en la esfera; tercero, cuando sale de la esfera; y cuarto, la transmisión por la lente divergente. En cada una es necesario determinar las posiciones del objeto y de la imagen.

Dado que en la primera parte  $o_1 = 20$  cm y  $f_1 = 12$  cm, usando la fórmula de Descartes, se calcula la posición de la imagen

$$\frac{1}{i_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{o_1} = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{5-3}{60}$$

$$i_1 = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm}$$

La esfera tiene un radio igual a  $20/2 = 10$  cm, y la distancia entre la lente convergente y la esfera vale  $20 - 10 = 10$  cm. Como la imagen se forma 30 cm a la derecha de la lente, esto implica que se halla  $30 - 10 = 20$  cm pasado la superficie esférica. Luego, el segundo objeto es virtual y su posición vale  $o_2 = -20$  cm. Además, la superficie refringente es convexa, de manera que se debe usar el valor positivo para el radio  $r = +10$  cm en la Ec. (3.1, 85) con  $n_1 = 1$  y  $n_2 = 1,5$

$$\frac{n_2}{i_2} = \frac{n_2 - n_1}{r} - \frac{n_1}{o_2}$$

$$\frac{1,5}{i_2} = \frac{1,5 - 1}{10} - \frac{1}{-20} = \frac{0,5}{10} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

$$i_2 = 1,5 \times 10 = 15 \text{ cm}$$

La imagen está 15 cm a la derecha de la primera superficie esférica y a una distancia  $o_3 = 20 - 15 = 5$  cm de la segunda superficie. Cuando la luz sale de la esfera, la superficie es cóncava ( $r' = -10$  cm) y se intercambian los índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$  en la fórmula de Descartes para superficies esféricas refringentes

$$\frac{1}{i_3} = \frac{1 - 1,5}{r'} - \frac{1,5}{o_3} = \frac{-0,5}{-10} - \frac{1,5}{5} = \frac{0,5 - 3}{10}$$

$$i_3 = \frac{10}{-2,5} = -4 \text{ cm}$$



La tercera imagen es virtual y aparece 4 cm a la izquierda de la segunda superficie. De nuevo, la separación entre la esfera y la lente vale 10 cm, de tal forma que el cuarto objeto está en  $o_4 = 10 - (-4) = 14$  cm. Finalmente, se obtiene para la última lente

$$\frac{1}{i_4} = \frac{1}{f_4} - \frac{1}{o_4} = \frac{1}{-14} - \frac{1}{14} = -\frac{1+1}{14}$$

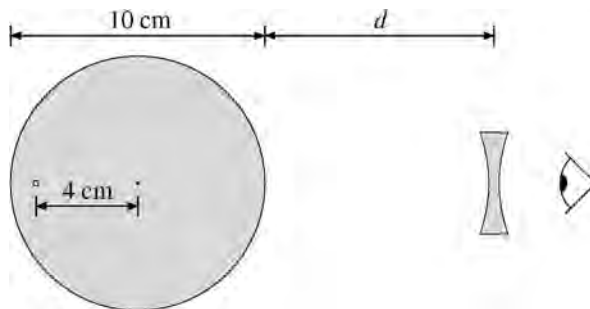
$$i_4 = -\frac{14}{2} = -7 \text{ cm}$$

Por lo tanto, la imagen final se ubica 7 cm atrás de la lente divergente. La amplificación total vale

$$m = m_1 m_2 m_3 m_4 = \left(-\frac{30}{20}\right) \left(\frac{15}{n20}\right) \left(\frac{n4}{5}\right) \left(\frac{7}{14}\right) = -\frac{9}{20} = -0,45$$

es decir, la imagen se ve invertida y su tamaño reducido en comparación con el objeto.

**4.15** Una esfera de vidrio (índice de refracción  $n = 1,5$ ) de diámetro 10 cm contiene una pequeña burbuja situada a 4 cm del centro. (A) ¿A qué distancia  $d$  del borde de la esfera se debe colocar una lente divergente con distancia focal  $-72$  cm, de modo que la posición de la imagen final coincida con la burbuja? (B) Calcule la amplificación en este caso.



(A) Primero hay que determinar la posición de la imagen cuando la luz sale de la esfera. La superficie de refracción es cóncava, de manera que se debe usar el radio negativo  $r = -10/2 = -5$  cm en la Ec. de la superficie

esférica refringente. Ya que la distancia entre la burbuja y la superficie vale  $o_1 = 4 + 5 = 9 \text{ cm}$

$$\frac{1,5}{9} + \frac{1}{i_1} = \frac{1 - 1,5}{-5}$$

$$\frac{1}{i_1} = \frac{0,5}{5} - \frac{1}{6} = \frac{3 - 5}{30}$$

$$i_1 = \frac{30}{-2} = -15 \text{ cm}$$

La primera imagen está 15 cm a la izquierda de la superficie esférica, y la distancia total hasta la lente es igual a  $o_2 = d - i_1 = d + 15$ . Para que coincida con la posición de la burbuja, la imagen final debe encontrarse en<sup>5</sup>  $i_2 = -(d + 9)$ . Según la fórmula de Descartes, para lentes delgadas se obtiene que

$$\frac{1}{d + 15} + \frac{1}{-(d + 9)} = -\frac{1}{72}$$

$$72(d + 9 - d - 15) = -(d + 9)(d + 15)$$

$$72(-6) = -d^2 - (9 + 15)d - 9 \times 15$$

$$d^2 + 24d - 297 = 0$$

$$d = -12 \pm \sqrt{12^2 + 297} = \begin{cases} +9 \text{ cm} > 0 \\ -33 \text{ cm} < 0 \end{cases}$$

La única respuesta con un significado físico aceptable es  $d = 9 \text{ cm}$ , pues la separación entre la esfera y la lente no puede ser negativa.

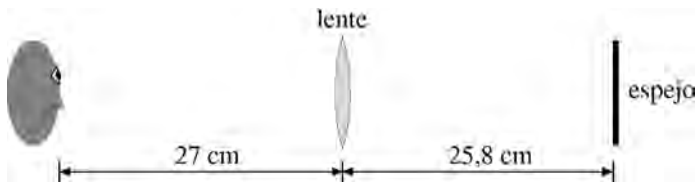
**(B)** De acuerdo con el ítem anterior las posiciones del objeto y de la imagen con respecto a la lente son  $o_2 = d + 15 = 24 \text{ cm}$  e  $i_2 = -(d + 9) = -18 \text{ cm}$ . Por lo tanto,  $m_1 = -n i_1 / (1 o_1) = 1,5 \times 15 / 9 = 2,5$ ,  $m_2 = -i_2 / o_2 = 18 / 24 = 0,75$  y la amplificación total asume el siguiente valor

$$m = m_1 m_2 = 1,875$$

<sup>5</sup> Se consideró el signo negativo porque la imagen está localizada a la izquierda de la lente.

La imagen final aparece en el mismo lugar que la burbuja pero su tamaño aumenta en un 87,5%.

**4.16** Una persona mira la imagen de su cara a través del sistema óptico mostrado en la Figura. Sabiendo que la distancia focal de la lente es 12 cm, ¿cómo aparece la cara?



Cuando la luz pasa inicialmente por la lente, la imagen se forma en

$$\frac{1}{i_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o_1} = \frac{1}{12} - \frac{1}{27} = \frac{9 - 4}{108}$$

$$i_1 = \frac{108}{5} = 21,6 \text{ cm}$$

El segundo objeto está en la posición  $o_2 = 25,8 - i_1 = 25,8 - 21,6 = 4,2$  cm, a la izquierda del espejo. Luego la imagen que genera la reflexión en el espejo se encuentra en  $i_2 = -o_2 = -4,2$  cm.

Después de reflejarse la luz se propaga en sentido contrario y se invierte la convención de signos. La posición del tercer objeto (= segunda imagen) con respecto a la lente es  $o_3 = 25,8 - i_2 = 25,8 - (-4,2) = 30$  cm. Con esto se determina dónde aparece la imagen final

$$\frac{1}{i_3} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o_3} = \frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{5 - 2}{60}$$

$$i_3 = \frac{60}{3} = 20 \text{ cm}$$

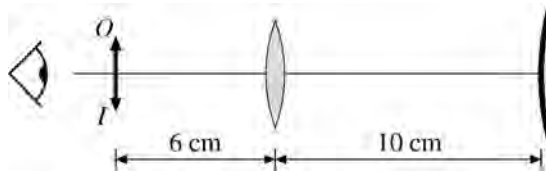
Así se concluye que la imagen se ve  $27 - 20 = 7$  cm delante de la cara.

Por último, se calcula la amplificación total que produce la transmisión por la lente, la reflexión en el espejo y la retransmisión por la lente

$$m = m_1 m_2 m_3 = \left(-\frac{i_1}{o_1}\right) \left(-\frac{i_2}{o_2}\right) \left(-\frac{i_3}{o_3}\right) = -\frac{21,6}{27} \frac{4,2}{4,2} \left(-\frac{20}{30}\right) = 0,533$$

O sea, se obtiene una imagen directa y con un tamaño reducido.

**4.17** Si la distancia focal de la lente en la Figura vale +5 cm, determine el radio del espejo para que la imagen I coincida con el objeto O.



La posición del primer objeto vale  $o_1 = 6$  cm y la imagen que se forma a través de la lente está en

$$\frac{1}{i_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o_1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{6-5}{30}$$

$$i_1 = 30 \text{ cm}$$

La imagen se encuentra 30 cm a la derecha de la lente y su posición relativa al espejo vale  $10 - 30 = -20$  cm. O sea, se forma 20 cm pasado la superficie esférica y es virtual.

Como la imagen final aparece sobre el objeto, ésta se debe originar de un objeto localizado 30 cm a la derecha de la lente, el cual también se halla 20 cm a la derecha del espejo. Así, se concluye que las posiciones del objeto y de la imagen relativa al espejo son  $o_2 = i_2 = -20$  cm. Por lo tanto, de acuerdo con la fórmula de Descartes

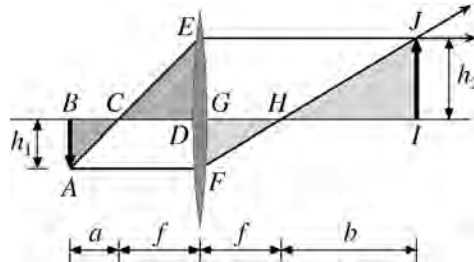
$$\frac{1}{f_{\text{esp}}} = \frac{1}{o_2} + \frac{1}{i_2} = \frac{1}{-20} + \frac{1}{-20} = -\frac{2}{20}$$

$$f_{\text{esp}} = -10 \text{ cm}$$

Ya que la distancia focal es negativa, se trata de un espejo convexo. La distancia focal de este espejo se calcula con la fórmula  $f_{\text{esp}} = -r/2$ , de manera que el radio de curvatura es  $r = -2f_{\text{esp}} = 20 \text{ cm}$ .

Se deja como ejercicio para el lector verificar que la imagen está invertida.

**4.18 Deduzca gráficamente la Ec. de Newton para el caso de una lente convergente que produce una imagen real.**



Considerando los triángulos semejantes  $ABC, CDE$ , y los triángulos semejantes  $FGH, HIJ$ , se obtiene el siguiente par de relaciones

$$\begin{cases} \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} \\ \frac{\overline{FG}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{IJ}}{\overline{HI}} \end{cases}$$

Como  $\overline{AB} = \overline{FG} = h_1$ ,  $\overline{DE} = \overline{IJ} = h_2$ ,  $\overline{CD} = \overline{GH} = f$ ,  $\overline{BC} = a$  y  $\overline{HI} = b$ , el par de ecuaciones equivalen a

$$\begin{cases} \frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{f} \\ \frac{h_1}{f} = \frac{h_2}{b} \end{cases}$$

Luego

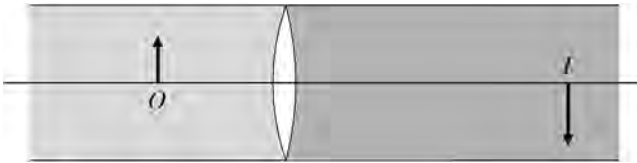
$$\frac{a}{f} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{f}{b}$$

esto es,

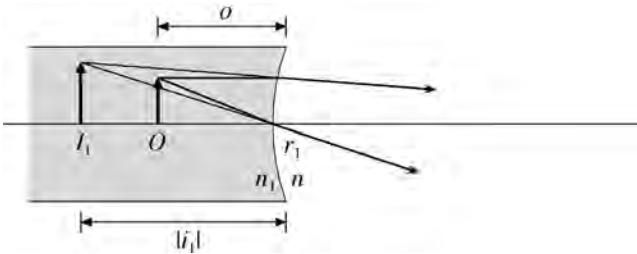
$$ab = f^2$$

que coincide con la Ec. (P 2.13.1, 69) para espejos esféricos.

**4.19** Una lente delgada con índice de refracción  $n$  y radios  $r_1, r_2$  está rodeada por dos medios con índices de refracción  $n_1, n_2$ . ¿Cuál es la fórmula que relaciona las posiciones del objeto y de la imagen?



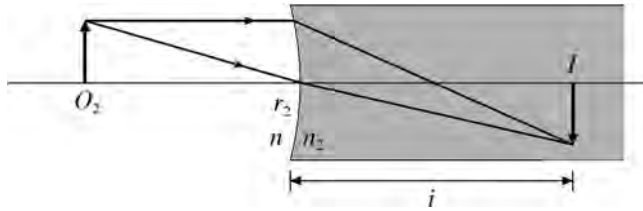
Con la finalidad de responder la pregunta, es necesario considerar la transmisión por dos superficies esféricas refringentes consecutivas.



El objeto inicial  $O$  se encuentra a una distancia  $o$  y la primera imagen  $I_1$  a una distancia  $i_1$ , las cuales se relacionan por medio de la fórmula de Descartes para superficies esféricas refringentes

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n}{i_1} = \frac{n - n_1}{r_1}$$

La imagen  $I_1$  equivale al segundo objeto  $O_2$  y como se trata de una lente delgada, éste se halla en la posición  $o_2 \approx 0 - i_1$  con relación a la segunda superficie.



Luego

$$\frac{n}{-i_1} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n}{r_2}$$

Sumando miembro a miembro las dos Ecs. anteriores se encuentra lo siguiente

$$\begin{aligned} \left( \frac{n_1}{o} + \frac{n}{i_1} \right) + \left( -\frac{n}{i_1} + \frac{n_2}{i} \right) &= \left( \frac{n - n_1}{r_1} \right) + \left( \frac{n_2 - n}{r_2} \right) \\ \frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} &= \frac{n - n_1}{r_1} - \frac{n - n_2}{r_2} \end{aligned} \quad (\text{P 4.19.1})$$

Note que si  $n_1 = n_2 = n_0$ , la última expresión se reduce a la forma que se usa habitualmente para la Ec. de la lente

$$\begin{aligned} \frac{n_0}{o} + \frac{n_0}{i} &= (n - n_0) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ \frac{1}{o} + \frac{1}{i} &= \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f} \end{aligned}$$

pero con  $n$  sustituido por  $n/n_0$  en la fórmula para el cálculo de la distancia focal  $f$ . Lo que importa en los problemas donde se refracta la luz es el valor relativo entre los índices de refracción.

**4.20** Considere rayos incidentes paralelos, es decir, un objeto en el infinito. ¿Cómo cambia la posición de la imagen que forma el cristalino en el Prob. 4.2 cuando está dentro del agua ( $n_1 = 1,33$ ), si el radio de curvatura es igual a  $R_1 = 3,36$  cm? ¿Y si es  $R_2 = 3$  cm?

De acuerdo con la Ec. (P 4.19.1), para un objeto en el infinito ( $o = \infty$ ) se obtiene que

$$\frac{1,33}{\infty} + \frac{1}{i} = \frac{1,56 - 1,33}{R} - \frac{1,56 - 1}{-R} = \frac{0,23 + 0,56}{R}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{0,79}{R}$$

donde se usaron los valores  $n = 1,56$  para el índice de refracción del cristalino,  $n_2 = 1$ ,  $r_1 = +R$  y  $r_2 = -R$ . Luego las imágenes se forman en

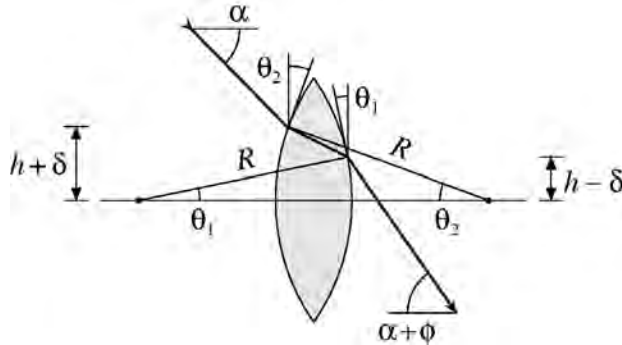
$$\begin{cases} i_1 = \frac{R_1}{0,79} = \frac{3,36}{0,79} = 4,25 \text{ cm} \\ i_2 = \frac{R_2}{0,79} = \frac{3}{0,79} = 3,80 \text{ cm} \end{cases}$$

El ojo no consigue enfocar la imagen sobre la retina (la cual se encuentra 3 cm detrás del cristalino) cuando está sumergido en el agua. Si el objeto se aproxima, la separación entre el punto donde se forma la imagen y la retina crece, de manera que la imagen se torna más borrosa aún (fuera de foco).

**4.21** Encuentre la distancia focal si rayos paralelos inciden sobre una lente delgada, formando un ángulo  $\alpha$  con el eje óptico. Los radios de la lente biconvexa son ambos iguales a  $R$  y el índice de refracción vale  $n$ .

Primero, es necesario determinar el desvío angular que experimenta un rayo de luz que pasa a una distancia  $h$  del centro óptico de la lente. Enseguida se analiza un rayo paralelo que cruza por el centro óptico y se calcula dónde ambos se interceptan, lo que representa la posición del foco.





Con la finalidad de encontrar el desvío angular  $\phi$  se puede usar el resultado del Prob. 1.20, y para eso se considera la lente como si fuera un prisma delgado. Además del ángulo de incidencia  $\alpha$ , es necesario conocer el ángulo  $\theta$  entre las caras por donde el rayo atraviesa la lente, lo que se determina sumando  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Como los ángulos son pequeños se deduce que

$$\begin{cases} \theta_1 \approx \frac{h - \delta}{R} \\ \theta_2 \approx \frac{h + \delta}{R} \end{cases}$$

de manera que

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \approx \frac{h - \delta}{R} + \frac{h + \delta}{R} = \frac{2h}{R}$$

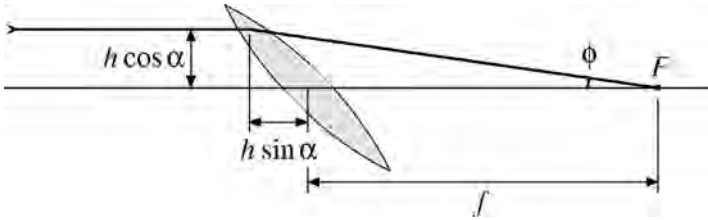
Observe que la altura del rayo con relación al eje óptico varía entre  $h + \delta$  y  $h - \delta$  al atravesar la lente. La altura promedio es  $h$ .

De acuerdo con la Ec. (P 1.20.3, 36) el ángulo de desvío vale

$$\phi = \theta \left( \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha} - 1 \right) = \frac{2h}{R} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha}{\cos \alpha} \quad (\text{P 4.21.1})$$

En particular, si el rayo cruza por el centro óptico de la lente, entonces  $h = 0$  y no hay desvío angular ( $\phi = 0$ ). Esto sucede porque las superficies refringentes en los puntos por donde entra y por donde sale la luz, son paralelas entre sí.

La Figura a continuación ilustra como se relacionan las distancias  $h, f$  y los ángulos  $\alpha, \phi$ . Note que se omitió el desvío lateral, que es aproximadamente el mismo para todos los rayos que cruzan próximo al centro óptico, pues el espesor de la lente prácticamente no varía en esta región.



Ya que la distancia focal  $f$  es mucho mayor que el ancho del haz de luz  $\sim h$

$$\phi \approx \tan \phi = \frac{h \cos \alpha}{h \sin \alpha + f} \approx \frac{h \cos \alpha}{f}$$

Comparando este resultado con la Ec. (P 4.21.1)

$$\frac{2h}{R} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{h \cos \alpha}{f}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

En el caso especial de una incidencia normal  $\sin \alpha = 0, \cos \alpha = 1$  y

$$\frac{1}{f_0} = \frac{2}{R} \frac{\sqrt{n^2 - 0^2} - 1}{1^2} = \frac{2}{R} (n - 1)$$

Esta fórmula coincide con la Ec. (4.1, 116) para el cálculo de la distancia focal si se sustituyen  $r_1 = +R$  y  $r_2 = -R$  (lente biconvexa con radios iguales).

Resulta interesante investigar cómo varía la distancia focal

$$f = \frac{R}{2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha}$$

$$= f_0 (n - 1) \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha} \quad (\text{P 4.21.2})$$

si la inclinación de la lente es pequeña. Según la Ec. (A.4, 153), hasta segundo orden en  $\alpha$  se tiene que

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \approx 1 - \alpha^2$$

De acuerdo con la Ec. (A.5, 153)

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha &\approx \left(n^2 - \alpha^2\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \\ &= n \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{1/2} - 1 + \frac{\alpha^2}{2} \\ &\approx n \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{n^2}\right) - 1 + \frac{\alpha^2}{2} \\ &= n - 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\alpha^2}{2} \\ &= (n - 1) \left(1 + \frac{\alpha^2}{2n}\right) \end{aligned}$$

donde en la última aproximación se usó la Ec. (A.1, 153) con  $x = -\alpha^2/2$  y  $a = 1/2$  para expandir la raíz cuadrada. Sustituyendo los dos últimos resultados en la Ec. (P 4.21.2)

$$\begin{aligned} f &\approx f_0 (n - 1) \frac{1 - \alpha^2}{(n - 1) \left(1 + \frac{\alpha^2}{2n}\right)} \\ &= f_0 (1 - \alpha^2) \left(1 + \frac{\alpha^2}{2n}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Usando nuevamente la Ec. (A.1, 153), pero con  $x = \alpha^2/2n$  y  $a = -1$

$$\begin{aligned} f &\approx f_0 (1 - \alpha^2) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n}\right) \\ &= f_0 \left[1 - \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2n} + \frac{\alpha^4}{2n}\right] \\ &\approx f_0 \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \alpha^2\right] \end{aligned}$$

Dado que  $n > 1$ , la diferencia relativa entre  $f_0$  y  $f$  vale

$$\frac{f_0 - f}{f_0} \approx \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \alpha^2 < \left(1 + \frac{1}{2}\right) \alpha^2 = \frac{3}{2} \alpha^2$$

o sea, no supera  $1,5 \alpha^2$  y la corrección es de segundo orden. Esto significa que, para pequeños ángulos de incidencia, el punto  $F$  se encuentra aproximadamente sobre el plano que es perpendicular al eje óptico y que contiene el foco cuando  $\alpha = 0$ . Éste se denomina plano focal de la lente.

## 4.2. Problemas propuestos

**4.22 (A)** Considere una lente convergente y un objeto real a una distancia o mayor que la distancia focal. Trazando los rayos que pasan por el foco objeto, foco imagen y el centro óptico, construya gráficamente la imagen real formada. **(B)** Repita el ítem anterior si o es menor que la distancia focal. **(C)** Finalmente, considere un objeto real frente a una lente divergente. Trazando los tres rayos obtenga la imagen virtual que se forma en este caso.

**4.23** Demuestre que la distancia focal equivalente  $f_{\text{eq}}$  de dos lentes en contacto que tienen distancias focales  $f_1, f_2$  está dada por

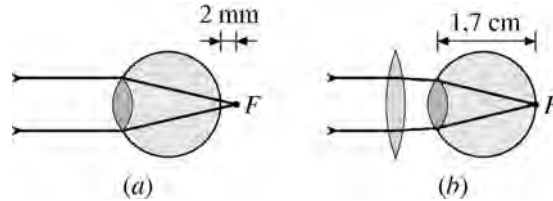
$$\frac{1}{f_{\text{eq}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

¿Cómo se generaliza el resultado para 3 o más lentes?

Resp. 
$$\frac{1}{f_{\text{eq}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \dots$$

**4.24** Suponga que la retina del ojo de una persona con hipermetropía se encuentra a 1,7 cm del cristalino. El foco  $F$  de un objeto localizado en el infinito se forma 2 mm atrás de la retina (Fig. (a)). Para corregir este

problema se usa una lente convergente antes del cristalino (Fig. (b)). Determine cuál debe ser la potencia de la lente (inverso de la distancia focal) expresada en dioptrías.



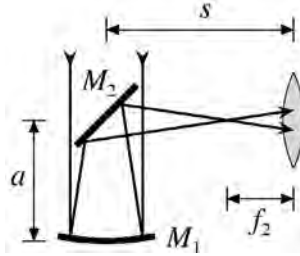
Resp. 6,2 dioptrías

4.25 Se tiene un sistema óptico compuesto por una lente biconvexa simétrica de radio  $R_A$  en contacto con una lente bicóncava de radio  $R_B$ . Las lentes se fabrican con dos materiales diferentes y se sabe que, en un cierto intervalo de longitud de onda, los índices de refracción  $n_A$  de la lente convergente y  $n_B$  de la lente divergente varían linealmente con  $\lambda$ . ¿Qué relación debe existir entre  $R_A$  y  $R_B$  para que la distancia focal equivalente no dependa de  $\lambda$ ?



Resp. 
$$\frac{1}{R_A} \frac{dn_A}{d\lambda} = \frac{1}{R_B} \frac{dn_B}{d\lambda}$$

4.26 La Figura ilustra un telescopio de reflexión. En comparación con un telescopio de refracción (Prob. 4.9), se sustituye la lente objetiva (convergente) por el espejo cóncavo  $M_1$ , el cual tiene la misma distancia focal  $f_1$  que la lente. El espejo plano  $M_2$  (que se encuentra a una distancia  $a$  de  $M_1$ ) desvía la luz reflejada hacia la lente ocular que tiene una distancia focal  $f_2$ . Determine cuánto debe valer la separación  $s$  entre  $M_2$  y la ocular, para que el punto focal de la combinación  $M_1$  y  $M_2$  coincida con el foco objeto de la lente.



Resp.  $s = f_1 + f_2 - a$

**4.27** Se coloca un pequeño objeto de profundidad  $L$  frente a una lente de distancia focal  $f$ . Sabiendo que el objeto se encuentra a una distancia  $o$  de la lente, calcule la profundidad aparente  $L'$  de la imagen.

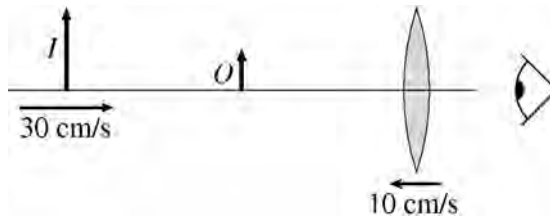
Resp.  $L' = L \frac{i^2}{o^2} = L \frac{f^2}{(o - f)^2}$

**4.28** Determine la amplificación  $m$  de una lente delgada que está rodeada por dos medios con índices de refracción  $n_1, n_2$  (Prob. 4.19).

$$m = - \frac{n_1 i}{n_2 o}$$

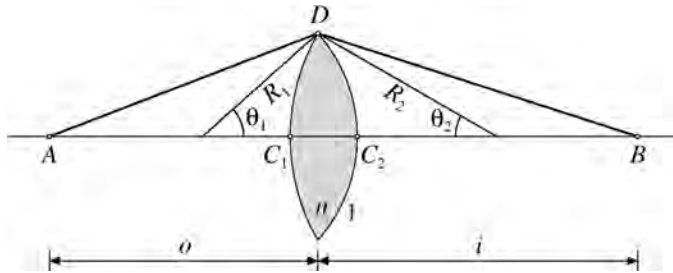
Resp.

**4.29** Cuando una lente se aleja a una velocidad constante igual a  $10 \text{ cm/s}$  y el objeto permanece inmóvil, se observa que la imagen virtual se aproxima a  $30 \text{ cm/s}$  y tiene una aceleración  $-40 \text{ cm/s}^2$ . Determine la distancia focal  $f$  de la lente.



Resp.  $f = 40 \text{ cm}$

4.30 Considere una lente biconvexa de radios  $R_1$  y  $R_2$  como en la Figura abajo. Los puntos  $A$  (objeto) y  $B$  (imagen) se encuentran a las distancias  $o$  e  $i$  del centro de la lente, respectivamente.



(A) Demuestre que para pequeños ángulos (aproximación paraxial)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C_1C_2} = \frac{R_1\theta_1^2 + R_2\theta_2^2}{2} \\ \overline{AD} = o + \frac{R_1^2\theta_1^2}{2o} \\ \overline{BD} = i + \frac{R_2^2\theta_2^2}{2i} \end{array} \right.$$

Además  $\overline{AC_1C_2B} = o + i$  y  $R_1\theta_1 = R_2\theta_2$ .

(B) De acuerdo con el principio de Fermat, los tiempos que demora la luz en ir de  $A$  hasta  $B$  por las trayectorias  $AC_1C_2B$  y  $ADB$  deben ser iguales (Prob. 3.17). Sabiendo que el índice de refracción de la lente vale  $n$ , obtenga la fórmula de Descartes. Observe que en este caso la distancia focal  $f$  se define por la siguiente Ec.

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$





## APÉNDICE A

### FÓRMULAS MATEMÁTICAS

#### A.1. Aproximaciones

Para  $x \ll 1$  valen las aproximaciones

$$\begin{aligned} (1+x)^a &= 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{1 \times 2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \times 2 \times 3}x^3 + \dots \\ &\approx 1 + ax \quad (\text{en 1}^{\text{er}} \text{ orden}) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} e^{\pm x} &= 1 \pm \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \times 2} \pm \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} \dots \\ &\approx 1 \pm x \quad (\text{en 1}^{\text{er}} \text{ orden}) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \ln(1 \pm x) &= \pm \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots \\ &\approx \pm x \quad (\text{en 1}^{\text{er}} \text{ orden}) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

En el caso que  $\theta \ll 1$

$$\sin \theta \approx \theta \quad (\text{en 1}^{\text{er}} \text{ orden}) \quad (\text{A.4})$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (\text{en 2}^{\text{do}} \text{ orden}) \quad (\text{A.5})$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \approx \theta \quad (\text{en 1}^{\text{er}} \text{ orden}) \quad (\text{A.6})$$

$$\sin(\phi \pm \theta) \approx \sin \phi \pm \theta \cos \phi \quad (\text{en 1}^{\text{er}} \text{ orden}) \quad (\text{A.7})$$

## A.2. Trigonometría

A partir de las identidades

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{A.8})$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{A.9})$$

se pueden deducir las siguientes relaciones

$$\sin \theta + \sin \phi = 2 \sin \left( \frac{\theta + \phi}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta - \phi}{2} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\cos \theta + \cos \phi = 2 \cos \left( \frac{\theta + \phi}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta - \phi}{2} \right) \quad (\text{A.11})$$

Además

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2} \quad (\text{A.12})$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \quad (\text{A.13})$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2} \quad (\text{A.14})$$

En particular, reemplazando  $\alpha - \beta = 0$  en la Ec. (A.8) se encuentra que

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (\text{A.15})$$

Los valores promedios de algunas funciones trigonométricas que aparecen a menudo son

$$\langle \sin(ax) \rangle = \langle \cos(ax) \rangle = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\langle \sin^2(ax) \rangle = \langle \cos^2(ax) \rangle = \frac{1}{2} \quad (\text{A.17})$$

En las Ecs. se asume que  $a \neq 0$ .

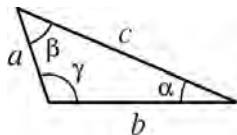


Figura A.1: Triángulo con lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y ángulos internos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Refiriéndose al triángulo mostrado en la Fig. A.1

▪ Ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (\text{A.18})$$

Cuando  $\gamma = 90^\circ$  se obtiene un triángulo rectángulo y la última Ec. se reduce al teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{A.19})$$

▪ Ley de los senos

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad (\text{A.20})$$

### A.3. Algunas derivadas e integrales

Para  $a = \text{const}$

$$\frac{d [\sin(ax)]}{dx} = a \cos(ax) \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{d [\cos(ax)]}{dx} = -a \sin(ax) \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d [e^{ax}]}{dx} = a e^{ax} \quad (\text{A.23})$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1) \quad (\text{A.24})$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| \quad (\text{A.25})$$



## APÉNDICE B

### BIBLIOGRAFÍA

ALONSO, M. & FINN, E. J. (1987). *Física (campos y ondas)*. Volumen 2. USA: Addison-Wesley Iberoamericana.

ALONSO, M. & FINN, E. J. (2000). *Física*. México: Pearson Educación.

BUECHE, F. J. & HECHT, E. (2001). *Física general*. (9ª ed.). México: McGraw-Hill Interamericana Editores.

GIANCOLI, D. C. (2000). *Physics for scientists & engineers*. (3ª ed.). USA: Prentice Hall.

HECHT, E. (2000). *Óptica*. (3ª ed.). España: Addison-Wesley Iberoamericana.

RESNIK, R.; HALLIDAY, D. & KRANE, K. S. (1994). *Física*. Volumen 2. (4ª ed.). México: Compañía Editorial Continental.

RESNIK, R.; HALLIDAY, D. & WALKER, J. (2001). *Fundamentos de Física*. Volumen 2. (3ª ed.). México: Compañía Editorial Continental.

SEARS, F. W.; ZEMANSKY, M. W.; YOUNG, H. D. & FREEDMAN, R. A. (1999). *Física universitaria*. Volumen 2. (9ª ed.).

México: Addison Wesley Longman.

SERWAY, R. A. & BEICHNER, R. J. (2002). *Física para ciencias e ingeniería*. Volumen 2, (5ª ed.). México: McGraw-Hill Interamericana Editores.

TIPLER, P. A. (1993). *Física*. Volumen 2. (3ª ed.).

España: Editorial Reverté.

WILSON, J. D. & BUFFA, A. J. (2003). *Física*. (5ª ed.).

México: Pearson Educación.



